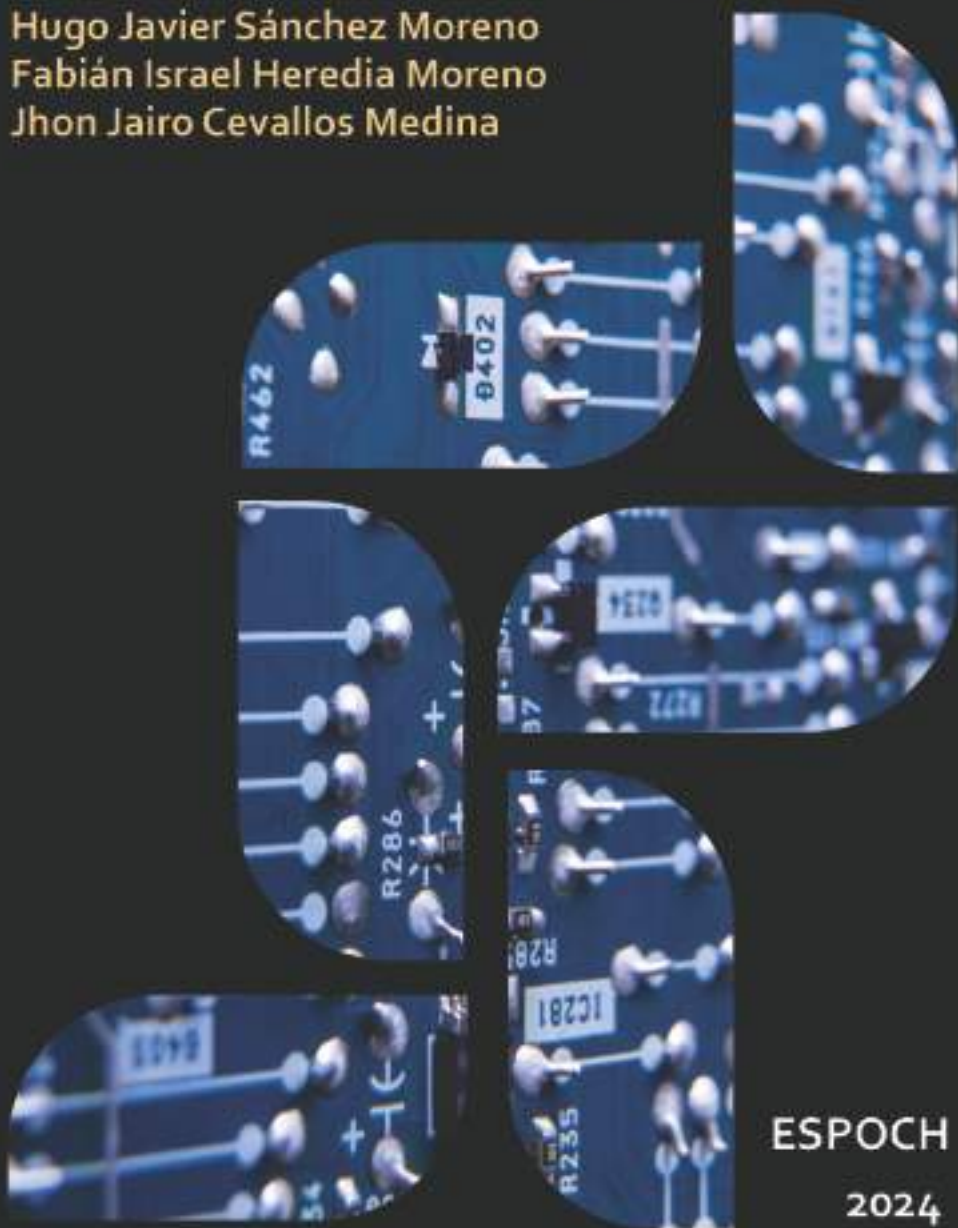


Métodos multipaso para PVI con MATLAB

(Matemática, física y química)

Hugo Javier Sánchez Moreno
Fabián Israel Heredia Moreno
Jhon Jairo Cevallos Medina

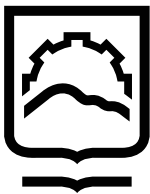


ESPOCH
2024

MÉTODOS MULTIPASO PARA PVI CON MATLAB
(MATEMÁTICA, FÍSICA Y QUÍMICA)
(Texto digital)

MÉTODOS MULTIPASO PARA PVI CON MATLAB (MATEMÁTICA, FÍSICA Y QUÍMICA)

Hugo Javier Sánchez Moreno
Fabián Israel Heredia Moreno
Jhon Jairo Cevallos Medina



**Decanato
de Publicaciones**



esPOCH

Métodos multipaso para PVI con MATLAB (Matemática, Física y Química)

©2024 Hugo Javier Sánchez Moreno

©2024 Fabián Israel Heredia Moreno

©2024 Jhon J. Cevallos M.

©2024 Escuela Superior Politécnica de Chimborazo

Panamericana Sur, kilómetro 1 1/2
Decanato de Publicaciones Riobamba, Ecuador
Teléfono: 593 (03) 2 998-200
Código Postal: EC0600155

Aval ESPOCH

Este libro se sometió a arbitraje bajo el sistema de doble ciego (*peer review*)

Corrección y diseño:

Editorial Politécnica ESPOCH

Publicado en Ecuador

Prohibida la reproducción de este libro, por cualquier medio, sin la previa autorización por escrito de los propietarios del *Copyright*

CDU: 512 + 621.3

MÉTODOS MULTIPASO PARA PVI CON MATLAB
(Matemática, Física y Química)

Riobamba: Escuela Superior Politécnica de Chimborazo
Decanato de Publicaciones, año 2024

183 pp. vol: 17 x 24 cm

ISBN: 978-9942-45-158-3

1. Álgebra

2. Electrónica

ÍNDICE GENERAL

INTRODUCCIÓN	8
CAPÍTULO I	
INTRODUCCIÓN MÉTODOS MULTIPASO	10
1.1 DEFINICIÓN DE MÉTODOS MULTIPASO	10
1.2 DESCRIPCIÓN DE LOS MÉTODOS DE ADAMS	11
1.2.1 Métodos Explícitos	12
1.2.2 Métodos Implícitos	13
1.3 RELACIÓN DE RECURRENCIA DE LOS COEFICIENTES	14
1.3.1 Adams Explícito	14
1.3.2 Adams Implícito	15
CAPÍTULO II	
MÉTODOS EXPLÍCITOS: ADAMS-BASHFORTH	17
2.1 ADAMS-BASHFORTH DE DOS PASOS: AB2	17
2.1.1 Algoritmo de Adams-Bashforth AB2	18
2.1.2 Algoritmo de Adams-Bashforth AB2 para Sistemas de Ecuaciones	19
2.2 ADAMS-BASHFORTH DE MÁS DE DOS PASOS	20
2.2.1 Algoritmo de Adams-Bashforth AB3	21
2.2.2 Algoritmo de Adams-Bashforth AB3 para Sistemas de Ecuaciones	22
2.2.3 Algoritmo de Adams-Bashforth AB4	23
2.2.4 Algoritmo de Adams-Bashforth AB4 para Sistemas de Ecuaciones	25
2.3 PROBLEMAS PVI CON ADAMS-BASHFORTH	26
Problema 1	26
Problema 2	30
Problema 3	32
Problema 4	33
Problema 5	37
Problema 6	39
Problema 7	44
Problema 8	47
Problema 9	49

Problema 10	53
Problema 11	55
Problema 12	56
Problema 13	59
Problema 14	63
Problema 15	65
Problema 16	67
Problema 17	68
Problema 18	70
Problema 19	71
Problema 20	73
2.4 EJERCICIOS PROPUESTOS	74
Ejercicio 1	74
Ejercicio 2	74
Ejercicio 3	75
Ejercicio 4	75
Ejercicio 5	76
Ejercicio 6	76
Ejercicio 7	76
Ejercicio 8	77
Ejercicio 9	77
Ejercicio 10	78

CAPÍTULO III

MÉTODOS IMPLÍCITOS: ADAMS-MOULTON 79

3.1 ADAMS-MOULTON DOS PASOS: AM2	79
3.1.1 Algoritmo de Adams- Moulton AM2	81
3.1.2 Algoritmo de Adams- Moulton AM2 para Sistemas de Ecuaciones	82
3.2 ADAMS-MOULTON DE MÁS DE DOS PASOS	84
3.2.1 Algoritmo de Adams-Moulton AM3	84
3.2.2 Algoritmo de Adams-Moulton AM4	86
3.2.3 Algoritmo de Adams-Moulton AM4 para Sistemas de Ecuaciones	87
3.3 PROBLEMAS PVI CON ADAMS-MOULTON	89
Problema 1	89
Problema 2	91
Problema 3	93
Problema 4	94

Problema 5	96
Problema 6	97
Problema 7	100
Problema 8	101
Problema 9	103
Problema 10	106
Problema 11	109
Problema 12	111
Problema 13	113
Problema 14	115
Problema 15	120
Problema 16	121
Problema 17	123
Problema 18	124
Problema 19	126
Problema 20	127
3.4 EJERCICIOS PROPUESTOS	129
Ejercicio 1	129
Ejercicio 2	129
Ejercicio 3	130
Ejercicio 4	130
Ejercicio 5	130
Ejercicio 6	131
Ejercicio 7	131
Ejercicio 8	132
Ejercicio 9	132
Ejercicio 10	133

CAPÍTULO IV

4 MÉTODOS PREDICTOR CORRECTOR	134
4.1 ADAMS BASHFORTH MOULTON DE DOS PASOS	134
4.1.1 Algoritmo de Adams- Bashforth-Moulton ABM2	134
4.1.2 Algoritmo de Adams- Bashforth-Moulton ABM4	135
4.1.3 Algoritmo de Adams- Bashforth-Moulton ABM4 para Sistemas de Ecuaciones	137

4.2 PROBLEMAS PVI CON ADAMS BASHFORTH-MOULTON	138
Problema 1	138
Problema 2	140
Problema 3	141
Problema 4	143
Problema 5	145
Problema 6	147
Problema 7	149
Problema 8	151
Problema 9	153
Problema 10	155
Problema 11	157
Problema 12	159
Problema 13	161
Problema 14	163
Problema 15	166
Problema 16	168
Problema 17	170
Problema 18	171
Problema 19	172
4.2 EJERCICIOS PROPUESTOS	174
Ejercicio 1	174
Ejercicio 2	174
Ejercicio 3	175
Ejercicio 4	175
Ejercicio 5	176
Ejercicio 6	176
Ejercicio 7	177
Ejercicio 8	177
Ejercicio 9	178
Ejercicio 10	178

BIBLIOGRAFÍA	179
---------------------------	------------

INTRODUCCIÓN

El libro MÉTODOS DE UN PASO PARA PVI CON MATLAB plasma los **métodos de un paso**, los mismos se denominan así porque la aproximación en el punto solo implica conocer la información en los puntos anteriores, aunque estos medios generalmente utilizan información de las evaluaciones funcionales entre los puntos t_n y t_{n+1} , no almacena dicha información de forma directa para ser utilizadas en futuras aproximaciones, de modo que la solución en un subintervalo está basado en exclusivamente la información disponible de dicho intervalo.

Dado que la solución aproximada está disponible en cada uno de los nodos antes de obtener la aproximación de la solución en el nodo t_{n+1} se debe desarrollar métodos que utilizan de forma más precisa toda la información disponible hasta el nodo t_n en lugar de utilizar solo la información del subintervalo.

Los métodos que utilizan la aproximación en más de un nodo previo para determinar la solución aproximada en el siguiente nodo se denomina métodos multipaso. A lo largo de este libro vamos a definir de forma precisa algunos de estos métodos, así como los tipos de métodos multipaso existentes.

Retomando la solución del PVI para aproximar la integral se sustituye el término integrando por un polinomio interpolador. En función de los métodos, este polinomio interpolador tendrá unos puntos u otros. Los métodos multipaso también se pueden extender a la resolución de sistemas de PVI aplicando las mismas modificaciones que en el caso de los métodos multipaso. En este libro se aplicará los métodos multipaso de Explícito: Adams-Bashforth, Implícito: Adams-Moulton y Predictor -Corrector.

El capítulo I trata sobre la introducción a los métodos multipaso y la descripción de los métodos de Adams.

En el capítulo II, se analiza y se construye el programa basado en ADAMS-BASHFORTH para la implementación en *Matlab* y luego se procede a utilizar para la solución de ecuaciones diferenciales en las áreas de matemáticas, física y química.

En el capítulo III, se analiza y se construye el programa basado en ADAMS-MOULTON para la implementación en *Matlab* y luego se procede a

utilizar para la solución de ecuaciones diferenciales en las áreas de matemáticas, física y química.

En el capítulo IV, se analiza y se construye el programa Predictor Corrector (ADAMS- BASHFORTH -MOULTON) para la implementación en *Matlab* y luego se procede a utilizar para la solución de ecuaciones diferenciales en las áreas de matemáticas, física y química.

CAPÍTULO I

INTRODUCCIÓN MÉTODOS MULTIPASO

El método multipaso se inició en 1855 a mediados del siglo XIX, cuando se estudiaba el problema de la capilaridad y se quería determinar la forma de una gota de sangre (u otro líquido) según un modelo físico, lo que condujo a construir un sistema de diferenciales no lineales presentado por Adams respaldando a Bashforth. El sistema puede resolver ecuaciones que no son exactas usando técnicas analíticas estándar. Adams sugirió usar un método de varios pasos explícito o implícito basado en la integración numérica utilizando la información obtenida en los pasos anteriores, punto final del intervalo de integración. Esta es la principal diferencia con el procedimiento de un solo paso, que utiliza solo la información del paso anterior. Es interesante que el método de varios pasos se propuso antes que el método de un solo paso, a excepción del método de Euler de orden uno de un paso (es decir, con un error global en los extremos del tamaño de paso utilizado en la integración). Esto se debe a que permite una convergencia de orden superior que los métodos de un solo paso (como los métodos de Runge-Kutta). Sin embargo, una desventaja de los métodos de varios pasos en comparación con los métodos de un solo paso es que requieren valores iniciales adicionales que no se proporcionan en los problemas de valor inicial (PVI) y, a menudo, deben proporcionarse mediante el método de Runge-Kutta. Valores de arranque adicionales, los métodos multipaso alcancen mayor orden en un solo paso de integración.

1.1 DEFINICIÓN DE MÉTODOS MULTIPASO

Un método multipaso de pasos para resolver el problema de valor inicial es aquel método en el cual la ecuación de diferencias para obtener la aproximación w_{n+1} en el punto t_{n+1} de la malla definida por $\{t_n = a + hn, n=1, \dots, N\}$, con $h=(b-a)/N$ puede representarse por medio de la siguiente ecuación donde es un entero mayor que uno;

$$w_{n+1} = a_0 w_n + a_1 w_{n-1} + \dots + a_p w_{n-p} + h[b_1 f(t_{n+1}, w_{n+1}) + b_0 f(t_n, w_n) + \dots + b_p f(t_{n-p}, w_{n-p})]$$
$$w_{n+1} = \sum_{i=0}^p a_i w_{n-i} + h \sum_{i=-1}^p b_i f(w_{n-i}, t_{n-i})$$

Para $n=p-1, p, \dots, N-1$, donde $h=(b-a)/N, a_0, a_1, \dots, a_p, b_{-1}, \dots, b_p$ son constantes y se especifican los valores iniciales $w_0=\alpha_0, w_1=\alpha_1, w_2=\alpha_2, \dots, w_{p-1}=\alpha_{p-1}$. Se toma de condiciones iniciales el valor de $w_0=\alpha$ que es el dato de la condición inicial y los demás valores necesarios para iniciar los métodos.

Cuando $b_{-1}=0$ el método es **explícito o abierto**, ya que la ecuación

$$w_{n+1} = a_0 w_n + a_1 w_{n-1} + \dots + a_p w_{n-p} + h[b_1 f(t_{n+1}, w_{n+1}) + b_0 f(t_n, w_n) + \dots + b_p f(t_{n-p}, w_{n-p})]$$

$$w_{n+1} = \sum_{i=0}^p a_i w_{n-i} + h \sum_{i=-1}^p b_i f(w_{n-i}, t_{n-i})$$

Da de manera explícita el valor de w_{n+1} en función de los valores previamente determinados.

Cuando $b_{-1} \neq 0$, el método es implícito o cerrado, ya que la ecuación

$$w_{n+1} = a_0 w_n + a_1 w_{n-1} + \dots + a_p w_{n-p} + h[b_1 f(t_{n+1}, w_{n+1}) + b_0 f(t_n, w_n) + \dots + b_p f(t_{n-p}, w_{n-p})]$$

$$w_{n+1} = \sum_{i=0}^p a_i w_{n-i} + h \sum_{i=-1}^p b_i f(w_{n-i}, t_{n-i})$$

w_{n+1} se encuentra en ambos lados, quedando especificado solo implícitamente. En la implementación de un método implícito, se debe resolver la ecuación implícita para w_{n+1} .

1.2 DESCRIPCIÓN DE LOS MÉTODOS DE ADAMS

Consideramos el problema

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)), & t \in [t_0, t_0 + T] \\ y(t_0) = \eta \end{cases}$$

Donde la función $f \in C^0([t_0, t_0 + T] \times \mathbb{R}^m)$ es lipschitziana respecto a la segunda variable, es decir, $\exists L > 0$ tal que

$$\forall t \in [t_0, t_0 + T] \forall y, z \in \mathbb{R}^m, |f(t, y) - f(t, z)| \leq L|y - z|$$

Tomamos una partición del intervalo $[t_0, t_0 + T]$ de la siguiente manera:

$$[t_0, t_0 + T] = \{t_0 < t_1 < \dots < t_N = t_0 + T\} \text{ y denotamos con } h_n = t_{n+1} - t_n$$

Integrando la ecuación

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)), & t \in [t_0, t_0 + T] \\ y(t_0) = \eta \end{cases}$$

entre t_n y t_{n+1} obtenemos:

$$y(t_{n+1}) = y(t_n) + \int_{t_n}^{t_{n+1}} f(t, y(t)) dt$$

Los métodos de Adams se obtienen utilizando una fórmula de cuadratura de tipo interpolarlo para aproximar $\int_{t_n}^{t_{n+1}} f(t, y(t)) dt$, es decir:

$$\int_{t_n}^{t_{n+1}} f(t, y(t)) dt \approx \int_{t_n}^{t_{n+1}} P_k(t) dt$$

Donde $P_k(t)$ es un polinomio de interpolación de grado k de la función f .

1.2.1 Métodos Explícitos

Los métodos explícitos se basan en escribir la solución de la ecuación diferencial $y'=f(x,y)$ como

$$y(x_{n+1}) = y(x_n) + \int_{x_n}^{x_{n+1}} f(x, y(x)) dx$$

Y aproxima $f(x,y)$ por el polinomio interpolador en $m+1$ puntos (x_n, y_n) , (x_{n-1}, y_{n-1}) , (x_{n-m}, y_{n-m}) , $m \leq n$:

$$y(x_{n+1}) = y(x_n) + \int_{x_n}^{x_{n+1}} p_m(x) dx$$

Utilizamos la fórmula de diferencias hacia atrás:

$$p_m(x) = \sum_{j=0}^m (-1)^j \binom{-s}{j} \nabla^j f_n$$

Con $s=(x-x_n)/h$ con lo que tenemos:

$$\int_{x_n}^{x_{n+1}} p_m(x) dx = h \sum_{j=0}^m b_j \nabla^j f_n$$

Donde

$$b_j = (-1)^j \int_0^1 \binom{-s}{j} ds$$

Las condiciones b_j no dependen ni de m ni de n . Los primeros valores son de

$$b_0 = 1, b_1 = \frac{1}{2}, b_2 = \frac{5}{12}, b_3 = \frac{3}{8}, b_4 = \frac{251}{720}$$

La regla de integración

$$y_{n+1} = y_n + h[b_0 f_n + b_1 \nabla f_n + \dots + b_m \nabla^m f_{n-m}]$$

Se denomina algoritmo de Adams-Bashforth. Esperando las diferencias en términos de valores de la función, obtenemos expresiones de la forma

$$y_{n+1} = y_n + h[\beta_0 f_n + \beta_1 \nabla f_n + \dots + \beta_m \nabla^m f_{n-m}]$$

Donde los β_i dependen del orden del polinomio.

1.2.2 Métodos Implícitos

Los métodos implícitos son similares a los métodos explícitos, salvo que el polinomio interpolador pasa por el punto (x_{n+1}, y_{n+1}) . Tenemos

$$y(x_{n+1}) = y(x_n) + \int_{x_n}^{x_{n+1}} p_{m+1}(x) dx$$

Donde utilizando la fórmula de diferencias hacia atrás tenemos

$$p_{m+1}(x) = \sum_{j=0}^{m+1} (-1)^j \binom{-s}{j} \nabla^j f_n$$

Con

$$s = \frac{x - x_{n+1}}{h}$$

resulta

$$\int_{x_n}^{x_{n+1}} p_{m+1}(x) dx = h \sum_{j=0}^{m+1} c_j \nabla^j f_{n+1}$$

Donde

$$c_j = (-1)^j \int_{-1}^0 \binom{-s}{j} ds$$

Tenemos por lo tanto el algoritmo

$$y_{n+1} = y_n + h[c_0 f_{n+1} + c_1 \nabla f_{n+1} + \dots + c_{m+1} \nabla^{m+1} f_{n-m}]$$

Denominado método de Adams-Moulton. Los primeros valores de c_j son

$$c_0 = 1, c_1 = \frac{-1}{2}, c_2 = \frac{-1}{12}, c_3 = \frac{-1}{24}, c_4 = \frac{-19}{720}$$

Expresando la diferencia en términos de los valores de las funciones la expresión anterior toma la forma

$$y_{n+1} = y_n + h[\gamma_0 f_{n+1} + \gamma_1 f_n + \dots + \gamma_{m+1} f_{n-m}]$$

Donde los γ_i dependen del orden m .

1.3 RELACIÓN DE RECURRENCIA DE LOS COEFICIENTES

1.3.1 Adams Explícito

Veamos que pueden obtenerse, de la forma sencilla, los coeficientes γ_j . Consideremos $G(t)$ función real que tiene γ_j como coeficientes en su desarrollo de Maclaurin, es decir

$$G(t) = \sum_{j=0}^{\infty} \gamma_j t^j$$

Con la definición de γ_j y suponiendo que la serie converge (entonces $|t| < 1$), tenemos

$$G(t) = \sum_{j=0}^{\infty} \left(-1^j \int_0^1 \binom{-s}{j} ds \right) t^j$$

$$G(t) = \sum_{j=0}^{\infty} -t^j \int_0^1 \binom{-s}{j} ds$$

la serie converge absolutamente para $|t| < 1$, y aplicando el teorema binomial se obtiene que

$$G(t) = \int_0^1 \left(\sum_{j=0}^{\infty} \binom{-s}{j} \right) (-t^j) ds = \int_0^1 (1-t)^{-s} ds$$

$$G(t) = \left. \frac{(1-t)^{-s}}{\ln(1-t)} \right|_0^1 = -\frac{(1-t)^{-1}}{\ln(1-t)} + \frac{1}{\ln(1-t)} = \frac{1 - \frac{1}{1-t}}{\ln(1-t)}$$

Obteniendo

$$G(t) = \sum_{j=0}^{\infty} \gamma_j t^j = \frac{-t}{(1-t)\ln(1-t)}$$

Reescribimos la expresión de la forma

$$-\frac{\ln(1-t)}{t} G(t) = \frac{1}{1-t}$$

Haciendo los cálculos pertinentes

$$(1-t)^{-1} = 1 + t + t^2 + t^3 + \dots$$

$$-\ln(1-t) = \int_0^t \frac{d\mu}{1-\mu} = \int_0^t (1 + \mu + \mu^2) d\mu = \mu + \frac{\mu^2}{2} + \frac{\mu^3}{3} + \dots \Big|_0^1 = t + \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3} + \dots$$

De la expresión $-\frac{\ln(1-t)}{t} G(t) = \frac{1}{1-t}$ deducimos

$$\left(1 + \frac{t}{2} + \frac{t^2}{3} + \dots + \frac{t^n}{n+1}\right) (\gamma_0 + \gamma_1 t + \gamma_2 t^2 + \dots + \gamma_n t^n) = 1 + t + t^2 + \dots$$

$$\gamma_0 + \left(\gamma_1 + \frac{1}{2}\gamma_0\right)t + \left(\gamma_2 + \frac{1}{2}\gamma_1 + \frac{1}{3}\gamma_0\right)t^2 + \dots + \left(\gamma_n + \frac{1}{2}\gamma_{n-1} + \frac{1}{n+1}\gamma_0\right)t^n$$

Comparando coeficientes de potencias respectivas de t en ambos miembros se obtiene la siguiente relación, la cual permite computar los coeficientes γ_j de forma recursiva,

$$\frac{\gamma_n}{1} + \frac{\gamma_{n-1}}{2} + \dots + \frac{\gamma_0}{n+1} = 1, n = 0, 1, 2, \dots$$

1.3.2 Adams Implícito

Igual que el caso explícito es posible dar una fórmula recurrente sencilla, para calcular los coeficientes γ_m^* . Si partimos de

$$G(t)^* = \sum_{j=0}^{\infty} \gamma_j^* t^j$$

Bajo las mismas suposiciones de convergencia

$$G(t)^* = \sum_{j=0}^{\infty} \left(-1^j \int_0^1 \binom{-s}{j} ds\right) t^j = \int_0^1 \left(\sum_{j=0}^{\infty} \binom{-s+1}{j}\right) (-t^j) ds$$

Aplicamos ahora el teorema binomial

$$\int_0^1 \left(\sum_{j=0}^{\infty} \binom{-s+1}{j} (-t^j)\right) ds = \int_0^1 (1-t)^{-s+1} ds = \frac{(1-t)^{-s+1}}{\ln(1-t)} \Big|_0^1$$

Tenemos que

$$G(t)^* = \sum_{j=0}^{\infty} \gamma_j^* t^j = \frac{-t}{\ln(1-t)}$$

Esta última expresión podemos reescribirla de la forma siguiente

$$-\frac{\ln(1-t)}{t} G(t)^* = 1$$

Procediendo de forma análoga al caso explícito deducimos que

$$\gamma_0^* + \left(\gamma_1^* + \frac{1}{2}\gamma_0^*\right)t + \left(\gamma_2^* + \frac{1}{2}\gamma_1^* + \frac{1}{2}\gamma_0^*\right)t^2 + \dots + \left(\gamma_n^* + \frac{1}{2}\gamma_{n-1}^* + \dots + \frac{1}{n+1}\gamma_0^*\right)t^n + \dots = 1$$

Comparando coeficientes de potencias respectivamente de en ambos miembros se tiene

$$\gamma_n^* + \frac{1}{2}\gamma_{n-1}^* + \frac{1}{3}\gamma_{n-2}^* + \dots + \frac{1}{n+1}\gamma_0^* = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 0 \\ 0 & \text{si } n \geq 1 \end{cases}$$

MÉTODOS EXPLÍCITOS: ADAMS-BASHFORTH

Los métodos explícitos son los métodos más simples, el polinomio interpolador pasa por los puntos:

$$\{(t_{k-n}, f(t_{k-n}, y_{k-n})), (t_{k-n+1}, f(t_{k-n+1}, y_{k-n+1})), \dots, (t_k, f(t_k, y_k))\}$$

2.1 ADAMS-BASHFORTH DE DOS PASOS: AB2

Partiendo de los puntos $\{(t_{k-1}, f(t_{k-1}, y_{k-1})), (t_k, f(t_k, y_k))\}$, el polinomio interpolador que pasa por estos dos puntos es:

$$p(\tau) = f(t_k, y_k) + \frac{f(t_k, y_k) - f(t_{k-1}, y_{k-1})}{t_k - t_{k-1}} (\tau - t_k)$$

$$p(\tau) = \frac{\tau - t_{k-1}}{h} f(t_k, y_k) + \frac{t_k - \tau}{h} f(t_{k-1}, y_{k-1})$$

Reemplazando en la integral

$$y_{k+1} = y_k + \int_{t_k}^{t_{k+1}} p(\tau) d\tau$$

$$y_{k+1} = y_k + \int_{t_k}^{t_{k+1}} \left(\frac{\tau - t_{k-1}}{h} f(t_k, y_k) + \frac{t_k - \tau}{h} f(t_{k-1}, y_{k-1}) \right) d\tau$$

$$y_{k+1} = y_k + \frac{1}{h} \int_{t_k}^{t_{k+1}} [\tau(f(t_k, y_k) - f(t_{k-1}, y_{k-1})) + t_{k-1}f(t_k, y_k) - t_k f(t_{k-1}, y_{k-1})] d\tau$$

$$y_{k+1} = y_k + \frac{1}{h} \left[\left(\frac{t_{k+1}^2 - t_k^2}{2} \right) ((f(t_k, y_k) - f(t_{k-1}, y_{k-1})) + (t_{k+1} - t_k)(t_{k-1}f(t_k, y_k) - t_k f(t_{k-1}, y_{k-1}))) \right]$$

$$y_{k+1} = y_k + \frac{1}{h} \left[\left(\frac{h(2t_k + h)}{2} \right) (f(t_k, y_k) - f(t_{k-1}, y_{k-1})) + h(t_{k-1}f(t_k, y_k) - t_k f(t_{k-1}, y_{k-1})) \right]$$

$$y_{k+1} = y_k + \left(\frac{(2t_k + h)}{2} + t_{k-1} \right) f(t_k, y_k) + \left(-\frac{(2t_k + h)}{2} + t_k \right) f(t_{k-1}, y_{k-1})$$

$$y_{k+1} = y_k + \frac{3h}{2} f(t_k, y_k) - \frac{h}{2} f(t_{k-1}, y_{k-1})$$

De este modo, el método de Adams-Bashforth de dos pasos, denotado por AB2, tiene la expresión:

$$y_{k+1} = y_k + \frac{h}{2} (3f(t_k, y_k) - f(t_{k-1}, y_{k-1}))$$

Tratándose de un método de segundo orden con un error global $O(h^2)$

Si desarrollamos el método para los diferentes valores de k , nos encontramos con un problema en los primeros nodos, pues para $k=0$;

$$y_1 = y_0 + \frac{h}{2} (3f(t_0, y_0) - f(t_{-1}, y_{-1}))$$

Es decir, habría que acceder al componente (t_{-1}, y_{-1}) que no existe. La solución para el primer valor es utilizar el método de Heun en $k=0$ y a partir de ahí utilizar el esquema de Adams-Bashforth.

2.1.1 Algoritmo de Adams-Bashforth AB2

Para la construcción del algoritmo de AB2 consideramos

- Obtención de la variable independiente discretizada.

- Inicialización del vector solución

- Para $k=1:N$

$$\text{Valor de } k1 = f(t(k), y(k))$$

$$\text{Valor de } k2 = f(t(k) + h/2, y(k) + h/2 * k1)$$

$$\text{Valor de } y(k+1) = y(k) + (k1 + k2)/2$$

- Fin para k

- Para $k=2:N$

$$\text{Valor de } k1 = f(t(k), y(k))$$

$$\text{Valor de } k2 = f(t(k-1), y(k-1))$$

$$\text{Valor de } y(k+1) = y(k) + h * (3 * k1 - k2) / 2$$

- Prepara datos de salida

De esta manera construimos el código en *Matlab* para Adams Bashforth de orden 2 para ecuaciones.

```
function [x,y,solex]= AB2(fun,a,b,N,y0)
h=(b-a)/N; % metodo explicito
x=a:h:b;
x=x(:); % pone en columnas
y=zeros(N+1,1);%matriz de ceros en columna
y(1)=y0;
for k=1:N % Contador
    K1=h*feval(fun,x(k),y(k)); %para evaluar funciones feval
    K2=h*feval(fun,x(k+1),y(k)+K1);
    y(k+1)=y(k)+(K1+K2)/2; % adaptamos a matrices
end
for k=2:N
    a0=feval(fun,x(k),y(k));
    a1=feval(fun,x(k-1),y(k-1));
    y(k+1)=y(k)+h*(3*a0-a1)/2;
end
```

2.1.2 Algoritmo de Adams-Bashforth AB2 para Sistemas de Ecuaciones

Para la construcción del algoritmo de AB2 para sistemas de ecuaciones consideramos

- Obtención de la variable independiente discretizada.
- Inicialización del vector solución
- Función anónima
- Para $k=1:N$
Valor de $k1=f(t(k),y(k))$
Valor de $k2=f(t(k)+h/2,y(k)+h/2*k1)$
Valor de $y(k+1)=y(k)+(k1+k2)/2$
- Fin para k
- Para $k=2:N$
Valor de $k1=f(t(k),y(k))$

Valor de $k_2=f(t(k-1),y(k-1))$

Valor de $y(k+1)=y(k)+h*(3*k_1-k_2)/2$

- Prepara datos de salida

De esta manera construimos el código en *Matlab* de Adams Bashforth de orden 2 para sistemas ecuaciones.

```
function [x,y]= AB2_Sis(fun,a,b,N,y0)
h=(b-a)/N; %paso
x=a:h:b; %vector de nodos x
x=x(:); % Vector en forma de columna;
n=length(y0); % (length)da la dimensión de cuantas columnas va tener
y=zeros(N+1,n);
y(1,:)=y0; % Almacenamos el vector la primera componente
for k=1:N % Contador
    K1=h*feval(fun,x(k),y(k,:)); %para evaluar funciones Feval
    K2=h*feval(fun,x(k+1),y(k,:)+K1);
    y(k+1,:)=y(k)+(K1+K2)/2; % adaptamos a matrices
end
for k=2:N
    a0=feval(fun,x(k),y(k,:));
    a1=feval(fun,x(k-1),y(k-1,:));
    y(k+1,:)=y(k)+h*(3*a0-a1)/2;
end
```

2.2 ADAMS-BASHFORTH DE MÁS DE DOS PASOS

Siguiendo un procedimiento similar al caso del método de Adams Bashforth de dos puntos, se puede obtener polinomios interpoladores que pasen por más de dos puntos. Por ejemplo, para el caso en que el polinomio pase por tres puntos, el método AB3 tendrá la expresión:

$$y_{k+1} = y_k + \frac{h}{12} (23f(t_k, y_k) - 16f(t_{k-1}, y_{k-1}) + 5f(t_{k-2}, y_{k-2}))$$

Cuyo error global $O(h^3)$. Para obtener los valores para $k = \{0,1\}$, podemos utilizar el método de Runge-Kutta.

Si el polinomio pasara por cuatro puntos, tendríamos el método AB4 cuya expresión es:

$$y_{k+1} = y_k + \frac{h}{24} (55f(t_k, y_k) - 59f(t_{k-1}, y_{k-1}) + 37f(t_{k-2}, y_{k-2}) - 9f(t_{k-3}, y_{k-3}))$$

Con un error global $O(h^4)$ para obtener los valores para $k = \{0, 1, 2\}$ utilizaremos el método de Runge-Kutta.

2.2.1 Algoritmo de Adams-Bashforth AB3

Para la construcción del algoritmo de AB3 consideramos

- Obtención de la variable independiente discretizada
- Inicialización del vector solución
- Para $k = 1:2$ aplicar el método de Runge Kutta

$$\text{Valor de } k1 = f(t(k), y(k))$$

$$\text{Valor de } k2 = f(t(k) + h/2, y(k) + h/2 * k1)$$

$$\text{Valor de } k3 = f(t(k) + h/2, y(k) + h/2 * k2)$$

$$\text{Valor de } k4 = f(t(k+1), y(k) + h * k3)$$

$$\text{Valor de } y(k+1) = y(k) + h/6 * (k1 + 2 * k2 + 2 * k3 + k4)$$

- Fin para k
- Para $k = 3:N$
 - Valor de $k1 = f(t(k), y(k))$
 - Valor de $k2 = f(t(k-1), y(k-1))$
 - Valor de $k3 = f(t(k-2), y(k-2))$
 - Valor de $y(k+1) = y(k) + h/12 * (23 * k1 - 16 * k2 + 5 * k3)$
- Prepara datos de salida

A continuación, construimos el código en *Matlab* para Adams Bashforth de orden 3 para ecuaciones.

```

function [x,y,solex]= AB3_Ecu(fun,a,b,N,y0)
h=(b-a)/N; % método explícito
x=a:h:b;
x=x(:); % pone en columnas
y=zeros(N+1,1); %matriz de ceros en columna
y(1)=y0;
for k=1:2
    k1=feval(fun,x(k),y(k));
    k2=feval(fun,x(k)+h/2,y(k)+h*k1/2);
    k3=feval(fun,x(k)+h/2,y(k)+h*k2/2);
    k4=feval(fun,x(k+1),y(k)+h*k3);
    y(k+1)=y(k)+h*(k1+2*k2+2*k3+k4)/6;
end
for k=3:N
    a0=feval(fun,x(k),y(k));
    a1=feval(fun,x(k-1),y(k-1));
    a2=feval(fun,x(k-2),y(k-2));
    y(k+1)=y(k)+h*(23*a0-16*a1+5*a2)/12;
end

```

2.2.2 Algoritmo de Adams-Bashforth AB3 para Sistemas de Ecuaciones

Para la construcción del algoritmo de AB3 para sistemas de ecuaciones consideramos

- Obtención de la variable independiente discretizada
- Inicialización del vector solución
- Para $k = 1:2$ aplicar el método de Runge Kutta
 - Valor de $k1 = f(t(k), y(k))$
 - Valor de $k2 = f(t(k) + h/2, y(k) + h/2 * k1)$
 - Valor de $k3 = f(t(k) + h/2, y(k) + h/2 * k2)$
 - Valor de $k4 = f(t(k+1), y(k) + h * k3)$
 - Valor de $y(k+1) = y(k) + h/6 * (k1 + 2 * k2 + 2 * k3 + k4)$
- Fin para k
- Para $k = 3:N$
 - Valor de $k1 = f(t(k), y(k))$

Valor de $k_2=f(t(k-1),y(k-1))$

Valor de $k_3=f(t(k-2),y(k-2))$

Valor de $y(k+1)=y(k)+h/(12*(23*k_1-16*k_2+5*k_3))$

- Prepara datos de salida

A continuación, construimos el código en *Matlab* para Adams Bashforth de orden 3 para sistema de ecuaciones.

```
function [x,y]= AB3_Sis(fun,a,b,N,y0)
h=(b-a)/N; %paso
x=a:h:b; %vector de nodos x
x=x(:); % Vector en forma de columna;
n=length(y0); % length da la dimensión de cuantas columnas va tener
y=zeros(N+1,n);
y(1,:)=y0; % Almacenamos el vector la primera componente
for k=1:2
    k1=feval(fun,x(k),y(k,:))';
    k2=feval(fun,x(k)+h/2,y(k,:)+h*k1/2)';
    k3=feval(fun,x(k)+h/2,y(k,:)+h*k2/2)';
    k4=feval(fun,x(k+1),y(k,:)+h*k3)';
    y(k+1,:)=y(k)+h*(k1+2*k2+2*k3+k4)/6;
end
for k=3:N
    a0=feval(fun,x(k),y(k,:))';
    a1=feval(fun,x(k-1),y(k-1,:))';
    a2=feval(fun,x(k-2),y(k-2,:))';
    y(k+1,:)=y(k,:)+h*(23*a0-16*a1+5*a2)/12;
end
```

2.2.3 Algoritmo de Adams-Bashforth AB4

Para la construcción del algoritmo de AB4 consideramos

- Obtención de la variable independiente discretizada.
- Inicialización del vector solución
- Para $k = 1:3$ aplicar el método de Runge Kutta

Valor de $k_1=f(t(k),y(k))$

Valor de $k_2=f(t(k)+h/2,y(k)+h/2*k_1)$

$$\text{Valor de } k3 = f(t(k) + h/2, y(k) + h/2 * k2)$$

$$\text{Valor de } k4 = f(t(k+1), y(k) + h * k3)$$

$$\text{Valor de } y(k+1) = y(k) + h/6 * (k1 + 2 * k2 + 2 * k3 + k4)$$

- Fin para k
- Para $k = 4:N$

$$\text{Valor de } k1 = f(t(k), y(k))$$

$$\text{Valor de } k2 = f(t(k-1), y(k-1))$$

$$\text{Valor de } k3 = f(t(k-2), y(k-2))$$

$$\text{Valor de } k4 = f(t(k-3), y(k-3))$$

$$\text{Valor de } y(k+1) = y(k) + h/(24 * (55 * k1 - 59 * k2 + 37 * k3 - 9 * k4))$$

- Prepara datos de salida

De esta manera construimos el código en *Matlab*, Adams Bashforth de orden 4 para ecuaciones.

```
function [x,y,solex]= AB4_Ecu(fun, a,b,N,y0)
h=(b-a)/N; % método explícito
x=a:h:b;
x=x(:); % pone en columnas
y=zeros(N+1,1); %matriz de ceros en columna
y(1)=y0;
for k=1:3
    k1=feval(fun,x(k),y(k));
    k2=feval(fun,x(k)+h/2,y(k)+h*k1/2);
    k3=feval(fun,x(k)+h/2,y(k)+h*k2/2);
    k4=feval(fun,x(k+1),y(k)+h*k3);
    y(k+1)=y(k)+h*(k1+2*k2+2*k3+k4)/6;
end
for k=4:N
    a0=feval(fun,x(k),y(k));
    a1=feval(fun,x(k-1),y(k-1));
    a2=feval(fun,x(k-2),y(k-2));
    a3=feval(fun,x(k-3),y(k-3));
    y(k+1)=y(k)+h*(55*a0-59*a1+37*a2-9*a3)/24;
end
```

2.2.4 Algoritmo de Adams-Bashforth AB4 para Sistemas de Ecuaciones

Para la construcción del algoritmo de AB4 para sistemas de ecuaciones diferenciales consideramos

- Obtención de la variable independiente discretizada.
- Inicialización del vector solución
- Para $k = 1:3$ aplicar el método de Runge Kutta
Valor de $k1=f(t(k),y(k))$
Valor de $k2=f(t(k)+h/2,y(k)+h/2*k1)$
Valor de $k3=f(t(k)+h/2,y(k)+h/2*k2)$
Valor de $k4=f(t(k+1),y(k)+h*k3)$
Valor de $y(k+1)=y(k)+h/6*(k1+2*k2+2*k3+k4)$
- Fin para k
- Para $k = 4:N$
Valor de $k1=f(t(k),y(k))$
Valor de $k2=f(t(k-1),y(k-1))$
Valor de $k3=f(t(k-2),y(k-2))$
Valor de $k4=f(t(k-3),y(k-3))$
Valor de $y(k+1)=y(k)+h/(24*(55*k1-59*k2+37*k3-9*k4))$
- Prepara datos de salida

De esta manera construimos el código en *Matlab*, Adams Bashforth de orden 4 para sistemas de ecuaciones diferenciales.

```

function [x,y]=AB4_Sis(fun,a,b,N,y0)
h=(b-a)/N;%paso
x=a:h:b;%vector de nodos x
x=x(:);% Vector en forma de columna;
y=zeros(N+1, length(y0));% length da la dimensión de cuantas columnas va tener
y(1,:)=y0;% Almacenamos el vector la primera componente
for k=1:3
    K1=feval(fun,x(k),y(k,:))';%para evaluar funciones Feval
    K2=feval(fun,x(k)+h/2,y(k,:)+h/2*K1)';
    K3=feval(fun,x(k)+h/2,y(k,:)+h/2*K2)';
    K4=feval(fun,x(k+1),y(k,:)+h*K3)';
    y(k+1,:)=y(k,:)+h*(K1+2*K2+2*K3+K4)/6;% adaptados a matrices
end
for k=4:N
    a0=feval(fun,x(k),y(k,:))';
    a1=feval(fun,x(k-1),y(k-1,:))';
    a2=feval(fun,x(k-2),y(k-2,:))';
    a3=feval(fun,x(k-3),y(k-3,:))';
    y(k+1,:)=y(k,:)+h*(55*a0-59*a1+37*a2-9*a3)/24;
end

```

2.3 PROBLEMAS PVI CON ADAMS-BASHFORTH

Problema 1

Sea el problema de valor inicial

$$y'''(t) + \frac{2}{t} y''(t) + 8y(t) = \frac{8}{t} e^{-2t} + 8 \ln(t) \quad t \in [1, 3]$$

Sujeto a las condiciones iniciales $y(1)=e^{-2}, y'(1)=1-2e^{-2}, y''(1)= -1+4e^{-2}$

- a) Escribe una función PVI que implemente el sistema de ecuaciones diferencial de tercer orden.

Transformamos el problema de valor inicial en un sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden

$$y = z_1$$

$$y' = z_1' = z_2$$

$$y'' = z_1'' = z_2' = z_3$$

$$y''' = z_1''' = z_2'' = z_3'$$

$$z_3' = \frac{8}{t} e^{-2t} + 8 \ln(t) - \frac{2}{t} z_3 - 8z_1 \quad t \in [1 \ 3]$$

function [ecuacion] = problema1(x,z)

ecuacion=[z(2);z(3);(8./x)*exp(-2.*x)+8*log(x)-(2./x)*z(3)+8*z(1)];

end

b) Resuelva el ejercicio con AB4 pasos de $h = 0.1$, representa la solución $y(t)$ e indica los valores para $t \in \{1, 1.5, 2, 2.5, 3\}$.

Calculamos el valor de N . Partiendo de $h = \frac{b-a}{N}$ y despejando se obtiene $N = \frac{b-a}{h}$

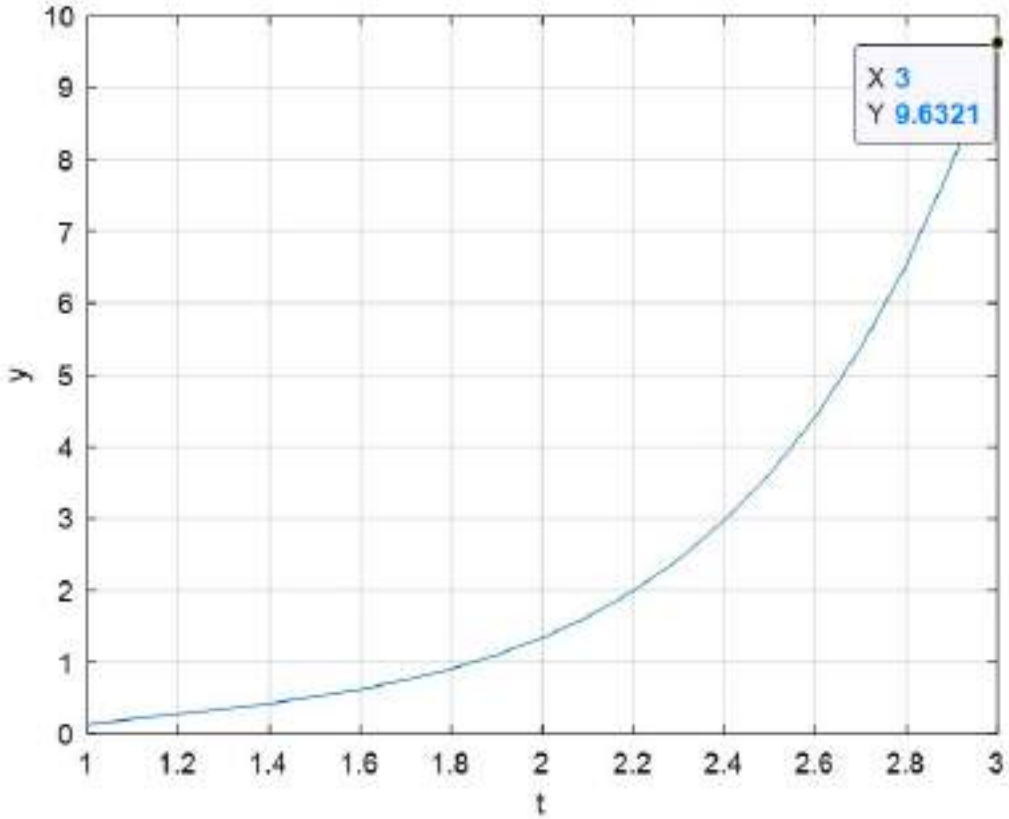
Donde $N = \frac{3-1}{0.1}$ obteniendo el número de iteraciones $N = 20$

Llamamos al método y procedemos a representar la solución $y(t)$

```
>> [x,y]=AB4_Sis('PVI',1,3,[exp(-2) 1-2*exp(-2) -1+4*exp(-2)],20);
```

```
>>plot(x,y(:,1)),grid on,xlabel('t'),ylabel('y')
```

Figura 2.1: Representación de la solución de $y(x)$ con AB4



Fuente: Autores

Para encontrar los valores para $t \in \{1, 1.5, 2, 2.5, 3\}$ encontramos las posiciones

$$\begin{array}{cc} b - a & N+1 \\ \text{Posicion-}a & x \end{array}$$

<ul style="list-style-type: none"> • 1 $\begin{array}{l} 2 \\ 0 \end{array} \frac{21}{x} = 1$	<ul style="list-style-type: none"> • 1.5 $\begin{array}{l} 2 \\ 0.5 \end{array} \frac{21}{x} = 5.25 \rightarrow 5$	<ul style="list-style-type: none"> • 2 $\begin{array}{l} 2 \\ 0 \end{array} \frac{21}{x} = 10.5 \rightarrow 11$
<ul style="list-style-type: none"> • 2.5 $\begin{array}{l} 2 \\ 1.5 \end{array} \frac{21}{x} = 15.75 \rightarrow 16$	<ul style="list-style-type: none"> • 3 $\begin{array}{l} 2 \\ 2 \end{array} \frac{21}{x} = 21$	

Ingresamos los códigos en *Matlab*

```
>> x=[x(1) x(5) x(11) x(16) x(21)]
```

```
>>y=[y(1) y(5) y(11) y(16) y(21)]
```

t	1	1.4	2	2.5	3
$y(t)$	0.1353	0.4274	1.3400	3.6256	9.6321

c) Calcule la estimación de orden de convergencia del método.

```
>>[x,y1]=AB4_Sis('PVI',1,3,[exp(-2)1-2*exp(-2)-1+4*exp(-2)],20*1);
sol1=y1(:,1);
```

```
>>[x,y2]=AB4_Sis('PVI',1,3,[exp(-2)1-2*exp(-2)-1+4*exp(-2)],20*2);
sol2=y2(:,1);
```

```
>>[x,y3]=AB4_Sis('PVI',1,3,[exp(-2)1-2*exp(-2)-1+4*exp(-2)],20*4);
sol3=y3(:,1);
```

```
>>[x,y4]=AB4_Sis('PVI',1,3,[exp(-2)1-2*exp(-2)-1+4*exp(-2)],20*8);
sol4=y4(:,1);
```

```
>>[x,y5]=AB4_Sis('PVI',1,3,[exp(-2)1-2*exp(-2)-1+4*exp(-2)],20*16);
sol5=y5(:,1);
```

```
>>[x,y6]=AB4_Sis('PVI',1,3,[exp(-2)1-2*exp(-2)-1+4*exp(-2)],20*32);
sol6=y6(:,1);
```

```
>>[x,y7]=AB4_Sis('PVI',1,3,[exp(-2)1-2*exp(-2)-1+4*exp(-2)],20*64);
sol7=y7(:,1);
```

```
>> e1=abs(sol1-sol2(1:2:end)); e2=abs(sol2-sol3(1:2:end));
```

```
>> e3=abs(sol3-sol4(1:2:end)); e4=abs(sol4-sol5(1:2:end));
```

```
>> e5=abs(sol5-sol6(1:2:end)); e6=abs(sol6-sol7(1:2:end));
```

```
>>relacion=[max(e1)/max(e2) max(e2)/max(e3) max(e3)/max(e4) max(e4)/
max(e5) max(e5)/max(e6) ]'
```

```
>> orden=log2(relacion)
```

orden =

3.6359

3.8147

3.9055

3.9522

3.9759

Se aproxima al **orden 4**

Problema 2

Por medio del método de AB2 con $h = 0.1$ y $N = 2$ determine los valores $y(1)$ y $y'(1)$ además grafique solución para $y(1)$ y $y'(1)$ para:

$$y''(t) - 0.05 y'(t) + 0.15y(t)=0$$

Sujeto a las condiciones iniciales $y'(0)=0, y(0)=1$

Solución

En primer lugar, reescribimos la ecuación

$$y''(t)=0.05 y'(t)-0.15y(t)$$

Transformamos el problema de valor inicial en un sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden

$$y=z_1$$

$$y'=z'_1=z_2$$

$$y''=z''_1=z'_2$$

$$y''(t)=0.05 y'(t) - 0.15y(t) \rightarrow z'_2=0.05z_2 - 0.15z_1$$

Calculamos el valor de a . Partiendo de $h = \frac{b-a}{N}$ y despejando se obtiene $N * h+a= b$

$$2*0.1+0=b \rightarrow b=0.5$$

$$y''(t)=0.05 y'(t) - 0.15y(t) \quad t \in [0, 0.5]$$

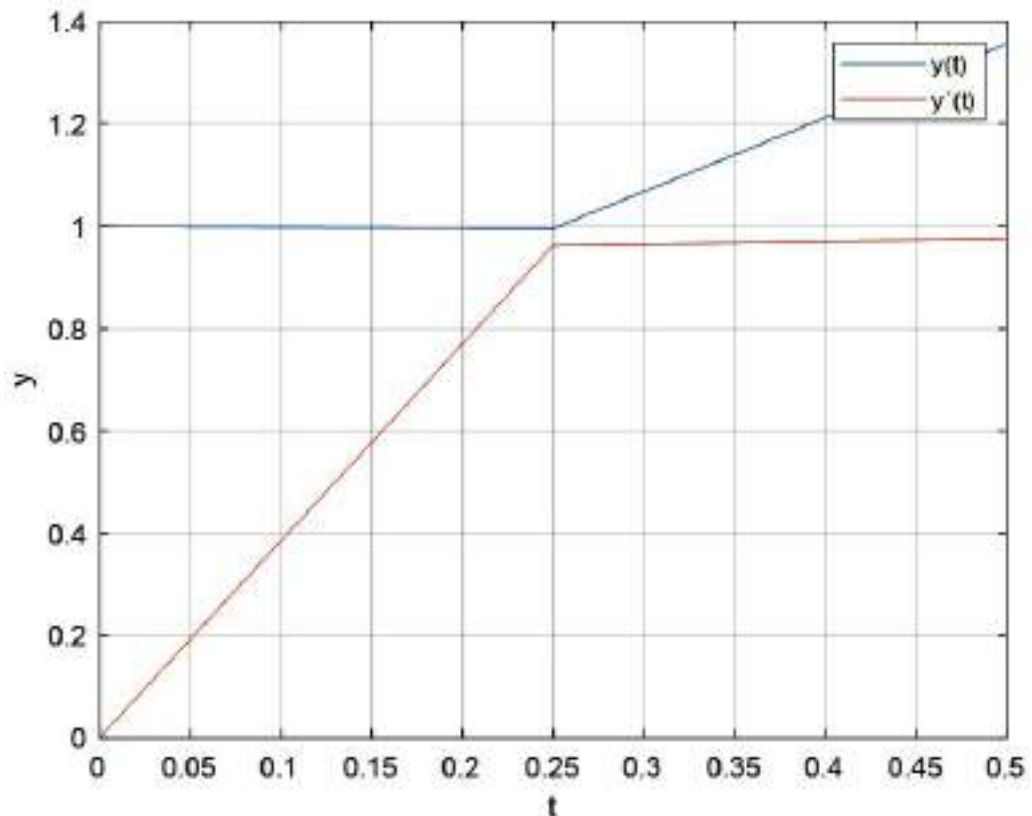
Creamos la función del PVI

```
function f= problema2(x,z)
    f=[z(2);0.05*z(2)-0.15*z(1)];
end
```

Llamamos al método y procedemos a representar la solución $y(t)$

```
>>[x,y]= AB2_Sis('problema2',0,0.5,2,[1 0]);
>> plot(x,y(:,1)),grid on,xlabel('t'),ylabel('y')
>> hold on
>> plot(x,y(:,2))
```

Figura 2.2: Representación de la solución del “Problema 2” con AB2



Fuente: Autores

Determinamos la solución en los puntos $t \in \{0,0.26,0.5\}$

t	0	0.25	0.5
y(t)	1	0.9953	1.3562
y'(t)	0	0.9623	0.9761

Problema 3

En un circuito que tiene una autoinductancia de $L = 50H$, una resistencia de $R = 20 \text{ ohmio}$ y una fuente de voltaje de $E = 10V$, si un interruptor se cierra en el instante $t = 0$ la corriente $I(t)$ satisface la ecuación:

$$L \frac{d}{dt} I(t) + RI(t) = E, \quad I(0) = 0$$

Determine el valor de la corriente para $0 < t \leq 10$ segundos mediante el método de AB2 con $h = 0.1$

Solución

En primer lugar, reescribimos la ecuación

$$50I(t)' + 20I(t) = 10$$

$$I(t)' = \frac{10}{50} - \frac{20}{50} I(t)$$

$$I(t)' = \frac{1}{5} - \frac{2}{5} I(t)$$

Procedemos Creamos la función del PVI

```
function f= problema3(x,I)
    f=1/5+2/5*I;
end
```

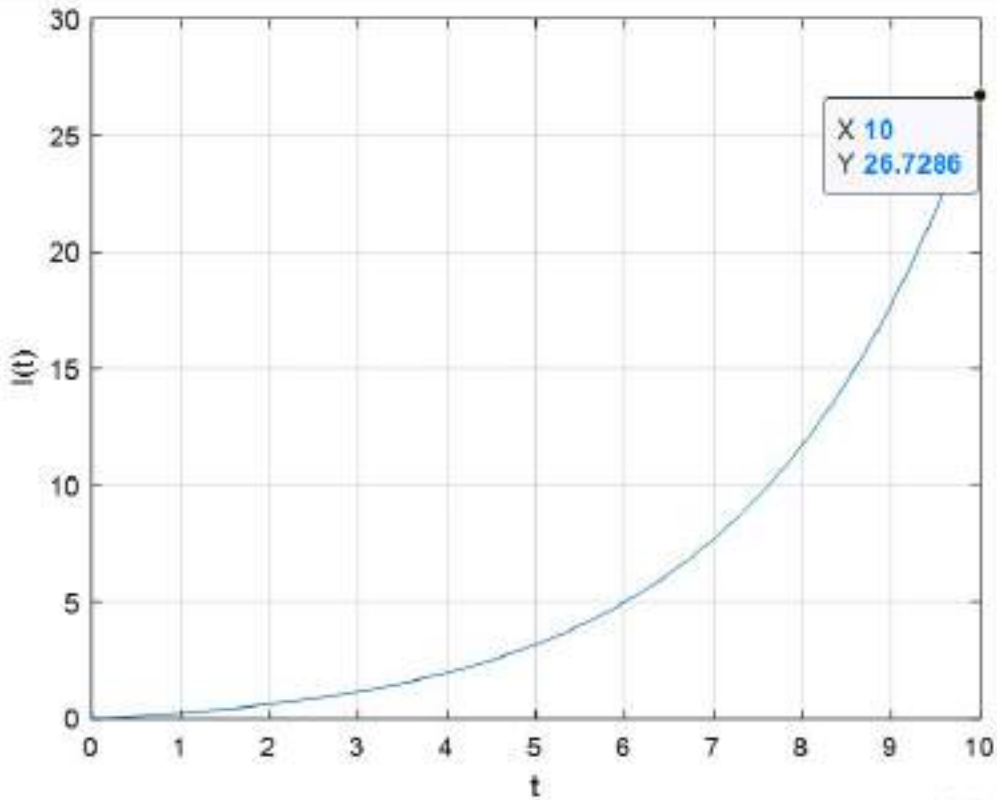
Calculamos el valor de N . Partiendo de $h = \frac{b-a}{N}$ y despejando se obtiene $N = \frac{b-a}{h}$

Donde $N = (10-0)/0.1$ obteniendo el número de iteraciones $N = 100$

Llamamos al método y procedemos a representar la solución

```
>> [x,y]= AB2_Ecu('problema3',0,10,100,0);
>> plot(x,y(:,1)),grid on,xlabel('t'),ylabel('I(t)')
```

Figura 2.3: Representación de la solución del “Problema 3” con AB2



Fuente: Autores

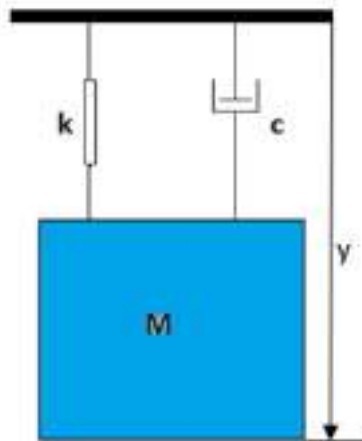
Problema 4

Cierto material con una masa $M = 0.5Kg$ se pone en le extremo inferior de un resorte sin masa. El extremo superior se fija a una estructura en reposo, el cubo recibe una resistencia de $R = B \frac{dy}{dt}$ del aire, donde B es una constante de amortiguamiento la ecuación del movimiento está dada por:

$$M \frac{d^2}{dt^2} y + B \frac{d}{dt} y + ky = 0, \quad y(0) = 1, y'(0) = 0$$

Donde y es el desplazamiento desde la posición estática, $k = 100 \text{ kg/s}^2$ constante del resorte y $B = 10 \text{ kg/s}$.

Figura 2.4: Sistema de masa resorte



Fuente: Autores

- a) Calcule $y(t)$, para $0 < t < 0.05$ mediante el método de AB3 con $h = 0.025$

Solución

En primer lugar, reescribimos la ecuación

$$0.5 \frac{d^2}{dt^2} y + 10 \frac{d}{dt} y + 100y = 0$$

$$y''(t) = -20y'(t) - 200y(t), \quad y(0) = 1 \quad y'(0) = 0$$

Transformamos el problema de valor inicial en un sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden

$$y = z_1$$

$$y' = z'_1 = z_2$$

$$y'' = z''_1 = z'_2$$

$$y''(t) = -20y'(t) - 200y(t) \rightarrow z'_2 = -20z_2 - 200z_1$$

Procedemos Creamos la función del PVI

```
function f= problema4(x,z)
    f=[z(2);-20*z(2)-200*z(1)];
end
```

Calculamos el valor de N . Partiendo de $h = \frac{b-a}{N}$ y despejando se obtiene $N = \frac{b-a}{h}$

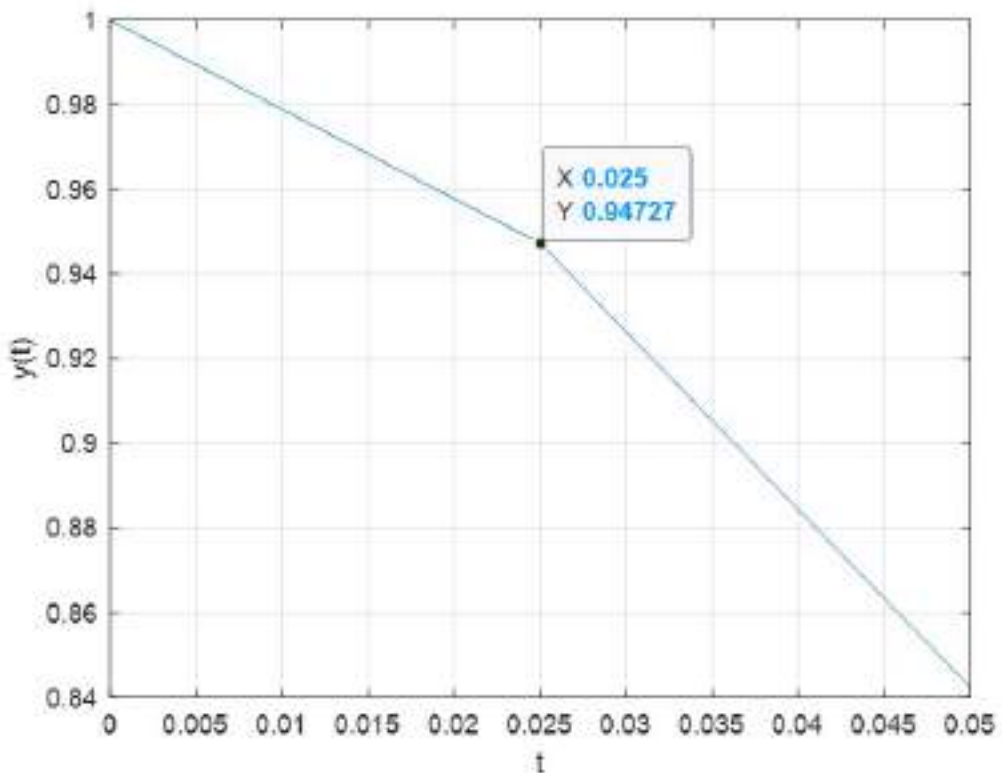
Donde $N = (0.005-0)/0.025$ obteniendo el número de iteraciones $N = 2$.

Llamamos al método y procedemos a representar la solución $y(t)$

```
>> [x,y]= AB3_Sis('problema4',0,0.05,2,[1 0]);
```

```
>> plot(x,y(:,1)),grid on,xlabel('t'),ylabel('y(t)')
```

Figura 2.5: Representación de la solución del “Problema 4” con AB3



Fuente: Autores

Determinamos la solución en el punto $t \in \{0.025\}$

Hallamos la posición

$$\text{Posicion} - a \quad \frac{b-a}{x} \quad \frac{N+1}{x} \rightarrow \frac{0.05}{0.025} \quad \frac{3}{x} = 1.5 \rightarrow 2$$

Ingresamos el código en *Matlab* para encontrar los puntos de la solución

```
>> x=[x(2)]
x = 0.0250
>> y=[y(2)]
y = 0.9473
```

b) Calcule $y(t)$, para $0 < t < 10$ segundos mediante el método de AB4 con $h = 0.001$

Partiendo de la ecuación

$$y''(t) = -20y'(t) - 200y(t), \quad y(0) = 1 \quad y'(0) = 0$$

y de la función

```
function f= problema4(x,z)
    f=[z(2);-20*z(2)-200*z(1)];
end
```

Calculamos el valor de N . Partiendo de $h = \frac{b-a}{N}$ y despejando se obtiene $N = \frac{b-a}{h}$

Donde $N = (10-0)/0.001$ obteniendo el número de iteraciones $N = 10000$

Determinamos la solución en el punto $t \in \{0.001\}$

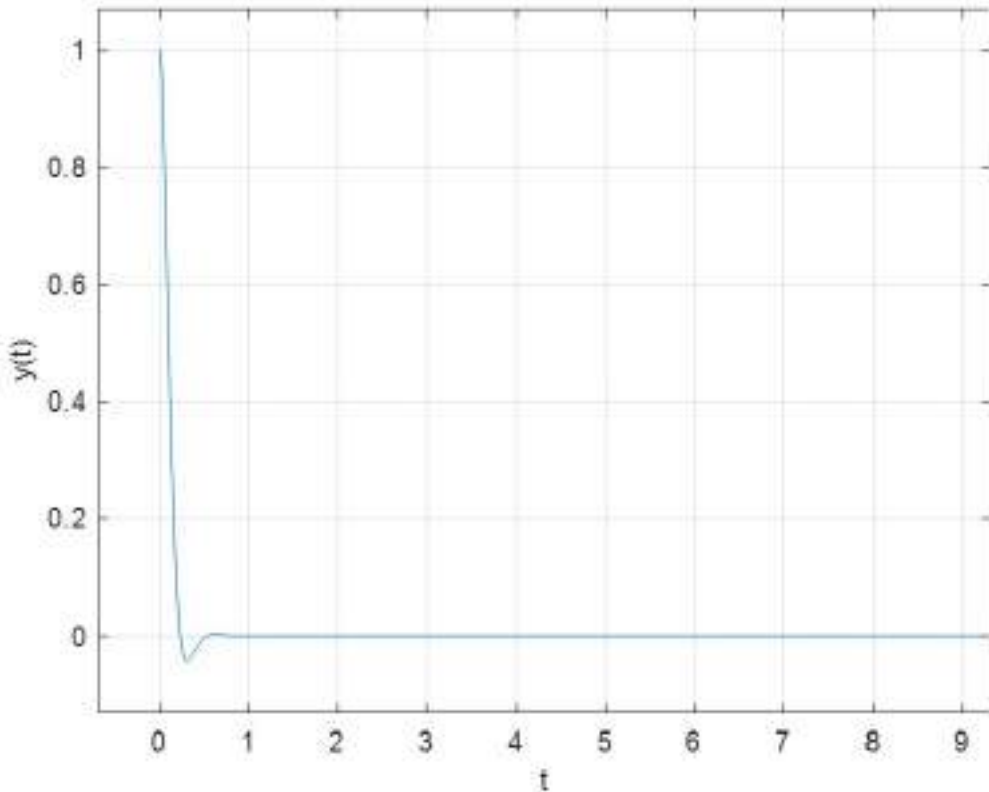
Hallamos la posición

$$\text{Posicion} - a \quad \frac{N + 1}{x} \rightarrow \frac{10}{0.001} \quad \frac{10001}{x} = 1.0001$$

Ingresamos el código en *Matlab* para encontrar los puntos de la solución

```
>> [x,y]=AB4_Sis('problema4',0,10,10000,[1 0]);
>> plot(x,y(:,1)),grid on,xlabel('t'),ylabel('y(t)')
```

Figura 2.6: Representación de la solución del “Problema 4” con AB4



Fuente: Autores

Ingresamos el código en *Matlab* para encontrar los puntos de la solución

```
>> x=[x(1)]  
x = 0  
>> y=[y(1)]  
y = 1
```

Problema 5

Una pieza metálica con una masa de 0.1Kg y 200°C se colocó en cierto momento dentro de un cuarto con una temperatura de 25°C, en donde esta sujeta al enfriamiento por convección natural y la transferencia de calor por radiación. Bajo la hipótesis de que la distribución de temperatura es uniforme en el metal, la ecuación de la temperatura se puede escribir como:

$$\frac{dT}{dt} = \frac{A}{\rho cv} [\varepsilon\sigma(297^4 - T^4) + h_c(297 - T)], \quad T(0) = 473$$

Donde T es la temperatura en grados kelvin $h = 1$ y las constantes son:

$$\begin{aligned} \rho &= 300 \text{ kg/m}^3 \\ v &= 0.001 \text{ m}^3 \\ A &= 0.25 \text{ m}^2 \\ c &= 900 \text{ J/kgK} \\ h_c &= 30 \text{ J/m}^2\text{K} \\ \varepsilon &= 0.8 \\ \sigma &= 5.67 \times 10^{-8} \text{ w/m}^2\text{K}^4 \end{aligned}$$

Solución

En primer lugar, reescribimos la ecuación

$$\frac{dT}{dt} = \frac{0.25}{270} [4.536 \times 10^{-8}(297^4 - T^4) + 30(297 - T)], \quad T(0) = 473, t \in [0, 180]$$

Procedemos Creamos la función del PVI

```
function f= problema5(x,T)
    f=0.25./270.*(4.536.^-8.*(297.^4-T.^4)+30*(297-T) );
end
```

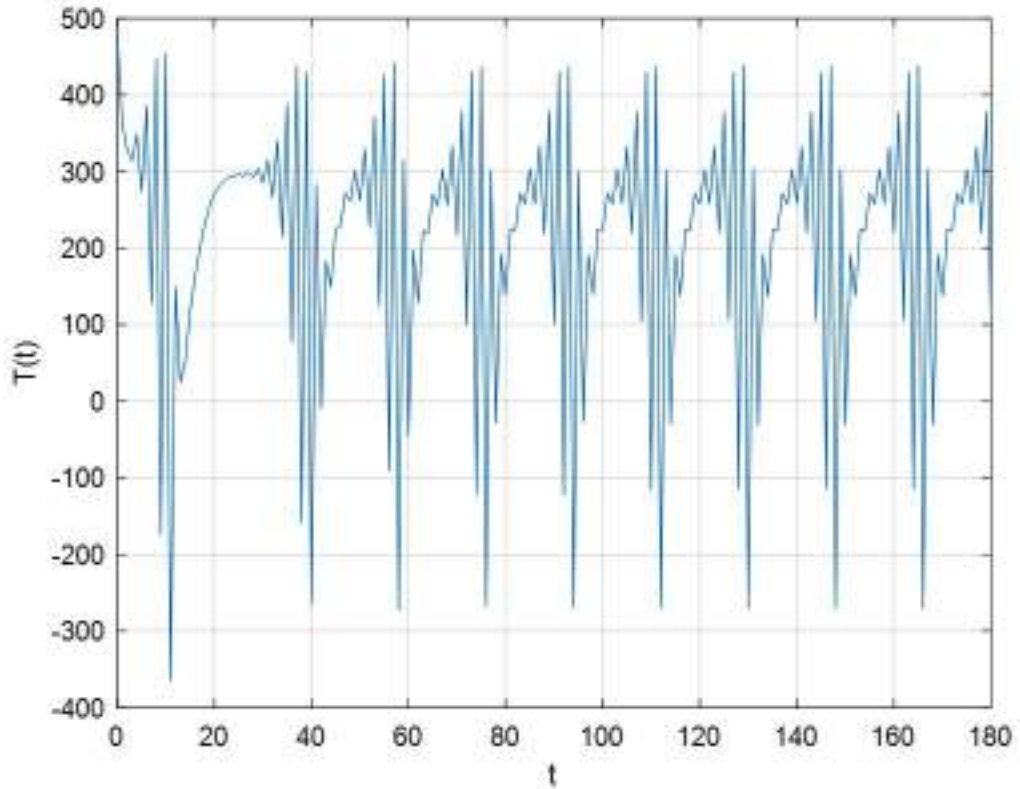
Calculamos el valor de N . Partiendo de $h = \frac{b-a}{N}$ y despejando se obtiene $N = \frac{b-a}{h}$

Donde $N = (180-0)/1$ obteniendo el número de iteraciones $N = 180$

Para hallar la solución utilizaremos el método de AB4 para una ecuación

```
>> [x,y]= AB4_Ecu('problema5',0,180,180,473);
>> plot(x,y(:,1)),grid on,xlabel('t'),ylabel('T(t)')
```

Figura 2.7: Representación de la solución del “Problema 5” con AB4



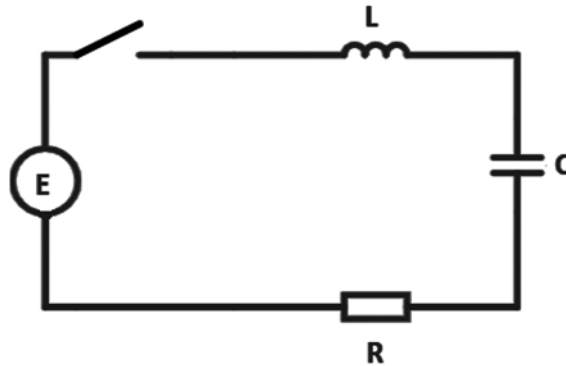
Fuente: Autores

Problema 6

La corriente del circuito que aparece en la figura satisface la ecuación integral:

$$L \frac{di}{dt} + Ri + \frac{1}{C} \int_0^t i(t') dt + \frac{1}{C} q(0) = E(t), \quad t > 0 \text{ ecuación 1}$$

Figura 2.8: Circuito RLC



Fuente: Autores

En el cual el circuito se cierra en el instante $t = 0$; $i = i(t)$ es la corriente (amperios), R es la resistencia (ohmios); L , C , E están dadas por:

$$L = 200 \text{ henry}$$

$$C = 0.001 \text{ faradios}$$

$$E(t) = 1 \text{ voltio para } t > 0$$

Las condiciones iniciales son $q(0) = 0$ carga inicial del capacitor e $i(0) = 0$. Calcular la corriente para $0 \leq t \leq 5$ seg después de cerrar el circuito ($t = 0$) con los siguientes valores de:

- a) $R=0$

Solución;

En primer lugar, definimos

$$q(t) = \int_0^t i(t') dt \text{ ecuación 2}$$

Derivamos la ecuación 2

$$q'(t) = i(t), q(0) = 0 \text{ ecuacion 3}$$

Sustituimos la ecuación 2 en la ecuación 1 y reescribimos

$$\frac{di}{dt} = -\frac{R}{L} i(t) - \frac{1}{CL} q'(t) - \frac{1}{LC} q(0) + \frac{E(t)}{L} = 0, \quad i(0) = 0$$

De esta manera transformamos en un sistema de ecuaciones de primer orden

$$i'(t) = -\frac{0}{200}i(t) - 5q(t) - 5q(0) + \frac{1}{200} = 0, \quad i(0) = 0$$

Como $q(0) = 0$

$$i'(t) = -5q(t) + \frac{1}{200} = 0, \quad i(0) = 0$$

$$q'(t) = i(t), \quad q(0) = 0$$

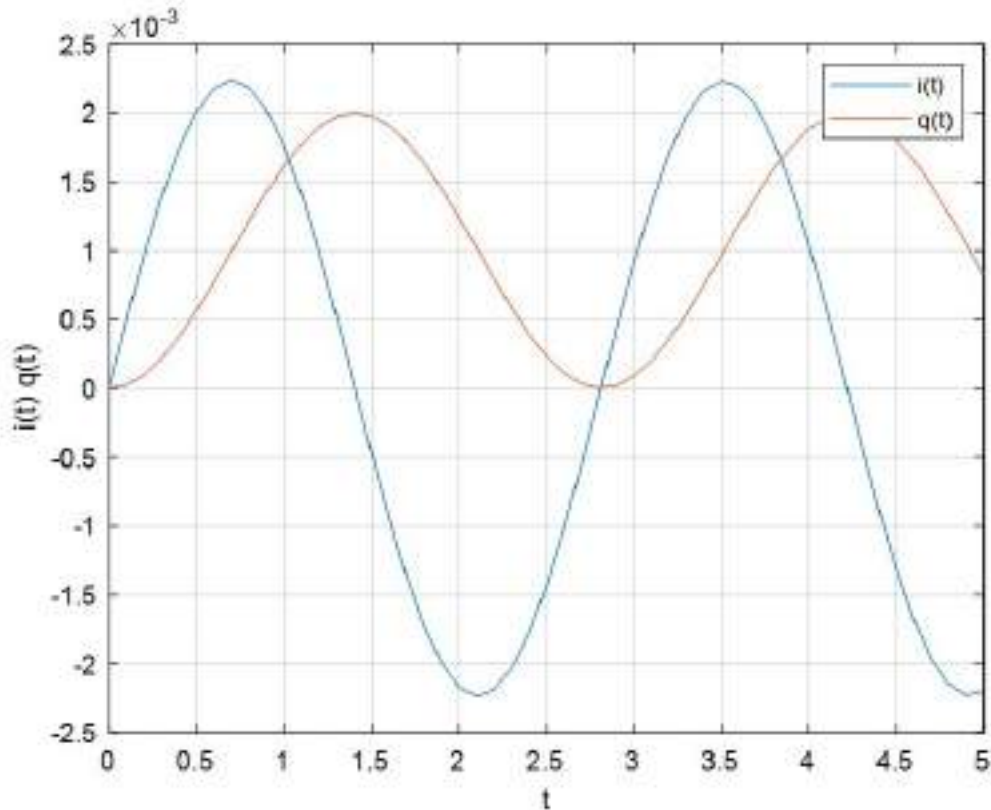
Procedemos a crear la función con el sistema de ecuaciones

```
function f= problema6(t,sistema)
    i=sistema(1);
    q=sistema(2);
    f=[-5*q+1/200;i];
end
```

En esta ocasión utilizaremos el método de AB4 para sistemas de ecuaciones con el objetivo de encontrar la solución con $N = 50$

```
>> [x,y]=AB4_Sis('problema6',0,5,50,[0 0]);
>> plot(x,y(:,1)),grid on,xlabel('t'),ylabel('i(t) q(t)')
>> hold on
>> plot(x,y(:,2))
```

Figura 2.9: Representación de la solución del “Problema 6a” con AB4



Fuente: Autores

b) $R = 50\Omega$

$$i'(t) = -0.25i(t) - 5q(t) + \frac{1}{200} = 0, \quad i(0) = 0$$

$$q'(t) = i(t), \quad q(0) = 0$$

Creamos la función nueva

```
function f= problema6(t,sistema)
```

```
    i=sistema(1);
```

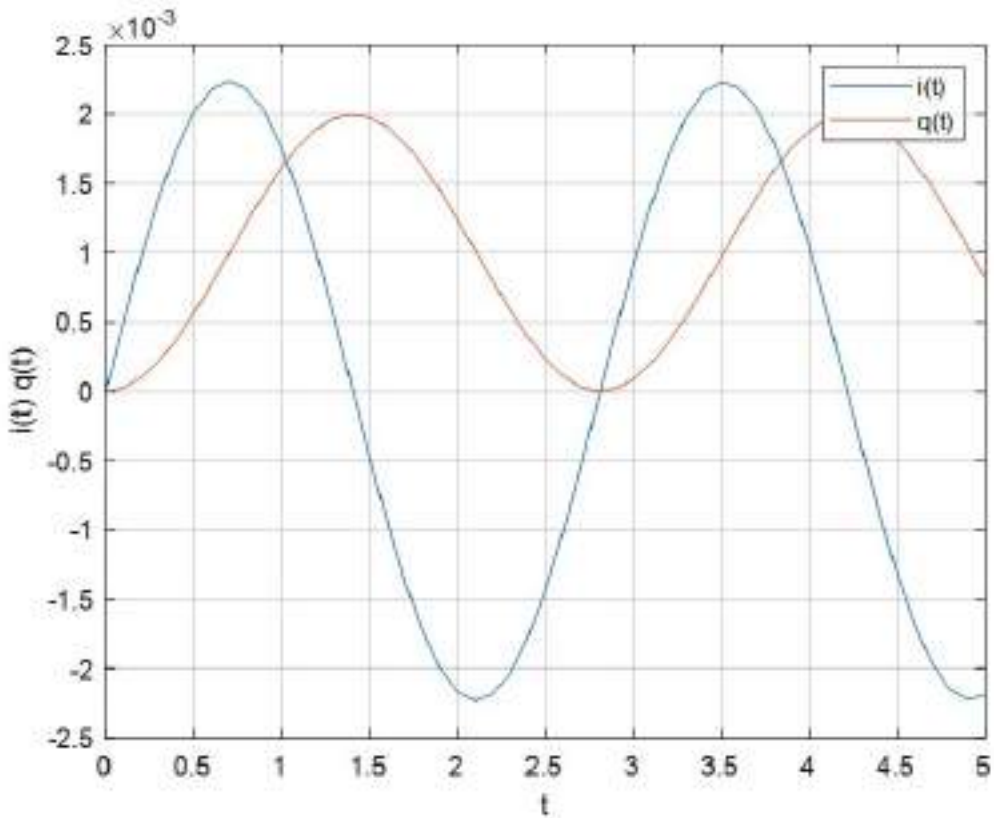
```
    q=sistema(2);
```

```
    f=[(-0.25*i-5*q+1./200);i];
```

```
end
```

utilizaremos el método de AB4 para sistemas de ecuaciones con el objetivo de encontrar la solución con $N = 50$

Figura 2.10: Representación de la solución del “Problema 6b” con AB4



Fuente: Autores

c) $R = 300 \Omega$

$$i'(t) = -1.5i(t) - 5q(t) + \frac{1}{200} = 0, \quad i(0) = 0$$

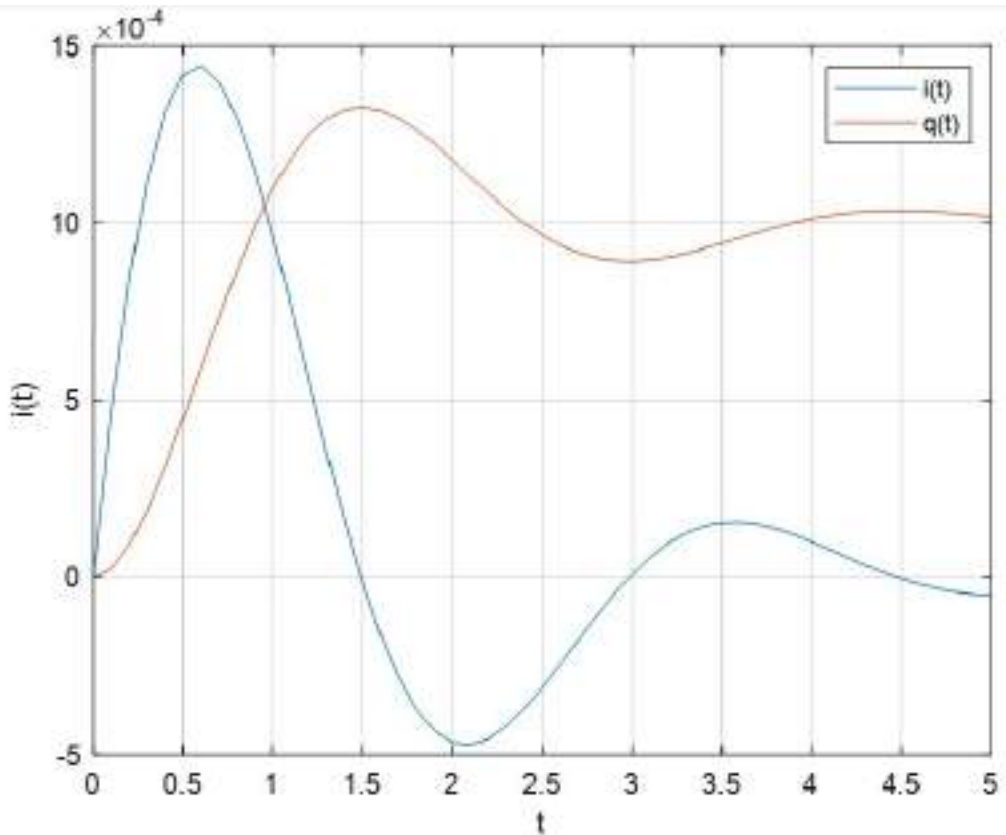
$$q'(t) = i(t), \quad q(0) = 0$$

Procedemos a crear la función

```
function f= problema6(t,sistema)
    i=sistema(1);
    q=sistema(2);
    f=[(-1.5*i-5*q+1./200);i];
end
```

utilizaremos el método de AB4 para sistemas de ecuaciones con el objetivo de encontrar la solución con $N = 50$

Figura 2.11: Representación de la solución del “Problema 6c” con AB4



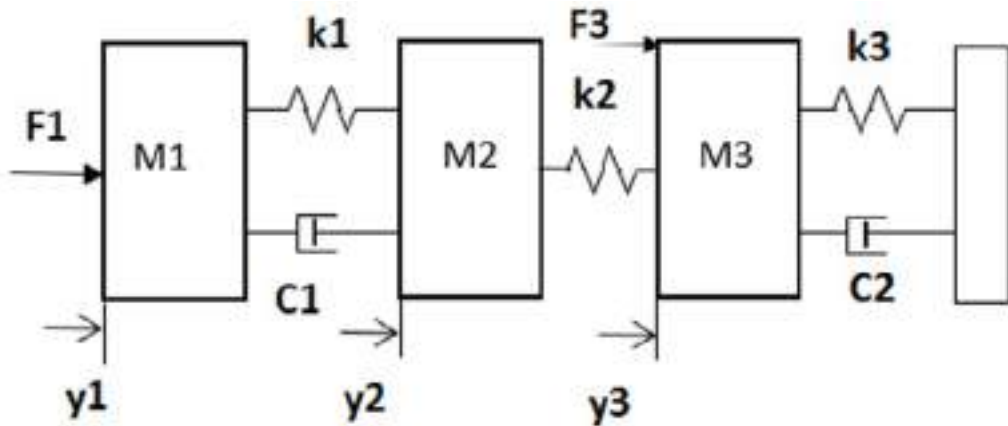
Fuente: Autores

Problema 7

En la figura se muestra un sistema de 3 masas. Los desplazamientos de estas 3 masas satisfacen las ecuaciones dadas por.

$$\begin{aligned}
 M_1 y''_1 + C_1 y'_1 + k_1 y_1 - C_1 y'_2 - k_2 y_2 &= F_1(t) \\
 -C_1 y'_1 - k_1 y_1 + M_2 y''_2 + C_1 y'_2 + (k_1 + k_2) y_2 - k_2 y_3 &= 0 \\
 -k_2 y_2 + M_3 y''_3 + C_2 y'_3 + (k_2 + k_3) y_3 &= F_3(t)
 \end{aligned}$$

Figura 2.12: Representación de un sistema de 3 masas



Fuente: Autores

Las constantes y condiciones iniciales son:

$$k_1 = k_2 = k_3 = 1$$

$$M_1 = M_2 = M_3 = 1$$

$$F_1(t) = 1, F_3(t)$$

$$C_1 = C_2 = 0.1$$

$$y_1(0) = y_1'(0) = y_2(0) = y_2'(0) = y_3(0) = y_3'(0) = 0$$

Resuelva el sistema de ecuaciones con AB4 para $0 \leq t \leq 30$ seg y $h = 0.1$

Solución

$$y_1'' = \frac{F_1(t) - C_1 y_1' - k_1 y_1 + C_1 y_2' + k_2 y_2}{M_1}$$

$$y_2'' = \frac{C_1 y_1' + k_1 y_1 - C_1 y_2' - (k_1 + k_2) y_2 + k_2 y_3}{M_2}$$

$$y_3'' = \frac{F_3(t) + k_2 y_2 - C_2 y_3' - (k_2 + k_3) y_3}{M_3}$$

Se tiene un sistema de ecuaciones de segundo orden, transformamos en un sistema de ecuaciones de primer orden

$$y_1 = z_1$$

$$y_1' = z_1' = z_2$$

$$y_1'' = z_1'' = z_2'$$

$$y_1'' = \frac{F_1(t) - C_1 y_1' - k_1 y_1 + B_1 y_2' + k_2 y_2}{M_1} \rightarrow z_2' = \frac{F_1(t) - C_1 z_2 - k_1 z_1 + C_1 z_4 + k_2 z_3}{M_1}$$

$$y_2 = z_3$$

$$y_2' = z_3' = z_4$$

$$y_2'' = z_3'' = z_4'$$

$$y_2'' = \frac{B_1 y_1' + k_1 y_1 - B_1 y_2' - (k_1 + k_2) y_2 + k_2 y_3}{M_2} \rightarrow z_4' = \frac{C_1 z_2 + k_1 z_1 - C_1 z_4 - (k_1 + k_2) z_3 + k_2 z_5}{M_2}$$

$$y_3 = z_5$$

$$y_3' = z_5' = z_6$$

$$y_3'' = z_5'' = z_6'$$

$$y_3'' = \frac{F_3(t) + k_2 y_2 - C_2 y_3' - (k_2 + k_3) y_3}{M_3} \rightarrow z_6' = \frac{F_3(t) + k_2 z_3 - C_2 z_6 - (k_2 + k_3) z_5}{M_3}$$

Procedemos a crear la función

```
function f= problema7(x,z)
    M=1;%masa kg
    K=1;%constante de resorte
    F1=1;%fuerza newton
    F3=0;%fuerza en newton
    C=0.1;%coeficiente de amortiguamiento
    f=[z(2);(F1-C*z(2)-K*z(1)+C*z(4)+K*z(3))./M;z(4);(C*z(2)+K*z(1)-
    C*z(4)-2*z(3)+K*z(5))./M;z(6); ( F3+K*z(3)-C*z(6)-2*z(5))./M];
end
```

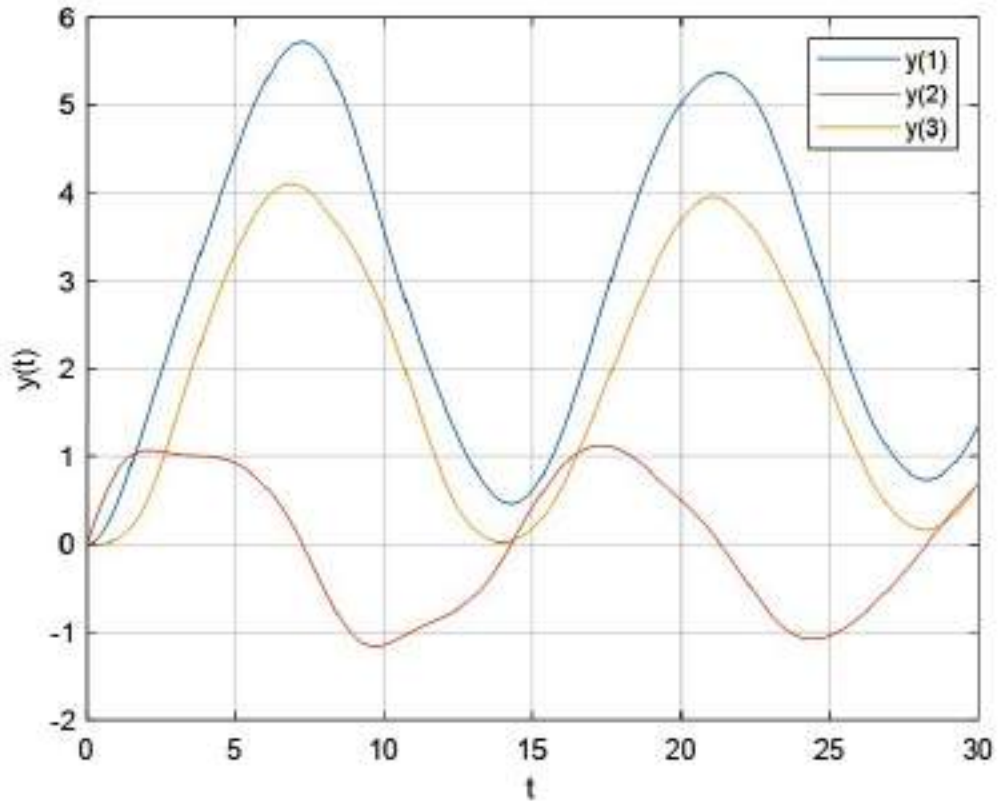
Calculamos el valor de N . Partiendo de $h = \frac{b-a}{N}$ y despejando se obtiene $N = \frac{b-a}{h}$

Donde $N = (30-0)/0.1$ obteniendo el número de iteraciones $N = 300$

Procedemos a llamar al método AB4 para encontrar la solución del problema

```
>> [x,y]=AB4_Sis('problema7',0,30,300,[0 0 0 0 0]);  
>> plot(x,y(:,1)),grid on,xlabel('t'),ylabel('y(t)')  
>> hold on  
>> plot(x,y(:,2))  
>> plot(x,y(:,3))  
>> legend ('y(1)', 'y(2)', 'y(3)')
```

Figura 2.13: Representación de la solución del “Problema 7” con AB4



Fuente: Autores

Problema 8

Una varilla de $1.0m$ de longitud, colocada en un vacío, se calienta mediante una corriente eléctrica aplicada a la misma. La temperatura en los extremos se fija en $273^{\circ}K$. El calor se disipa de la superficie mediante la transferencia de calor por radiación hacia el ambiente, cuya temperatura es $273^{\circ}K$ con las siguientes constantes, determinar la distribución de temperatura en la dirección del eje. La ecuación del calor en la dirección del eje x es:

$$-AK \frac{d^2}{dx^2} T + P\sigma(T^2 - 273^4) = Q, \quad 0 < x < 1.0$$

Donde

$K=60 \text{ W/mK}$ (conductividad térmica)

$Q = 5060 \text{ W/m}$ (tasa de generacion de calor por unidad de longitud de la barra)

$\sigma = 5.67 \times 10^{-8} \text{ W/m}^2 \text{ K}^4$ (cosntante de Stefan-Boltzmann)

$A = 0.0001 \text{ m}^2$ (area de la seccion transversal

$P = 0.01 \text{ m}$ (perímetro de la varilla)

Con las condiciones de frontera dadas por $T(0) = T(1) = 273$ donde T es la temperatura en grados Kelvin y con $N = 1$

Solución

$$\frac{d^2}{dx^2} T = \frac{Q - P\sigma(T^2 - 273^4)}{-AK}, \quad 0 < x < 1.0$$

Transformamos la ecuación de segundo orden en un sistema de ecuaciones de primer orden

$$T = z_1$$

$$T' = z_1' = z_2$$

$$T'' = z_1'' = z_2'$$

$$\frac{d^2}{dx^2} T = \frac{Q - P\sigma(T^2 - 273^4)}{-AK} \rightarrow z_2' = \frac{Q - P\sigma(z_1^2 - 273^4)}{-AK}$$

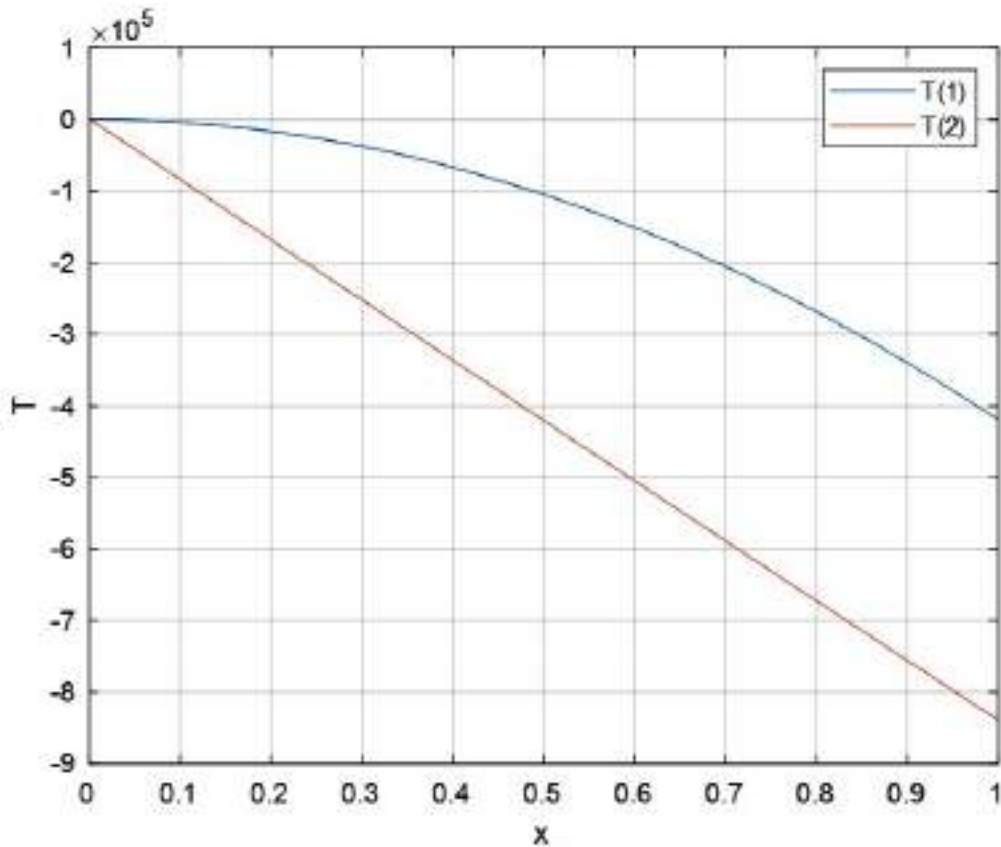
Creamos la función del ejercicio en *Matlab*

```
function f= problema8(x,z)
    K=60;%masa kg
    Q=5060;%constante de resorte
    o=5.67e-8;%fuerza newton
    A=0.0001;%fuerza en newton
    P=0.01;%coeficiente de amortiguamiento
    f=[z(2);(Q-(P.*o).*(z(1).^2-273.^4))./(-A.*K)];
end
```

llamamos al método de AB3 para encontrar la solución

```
>> [x,y]= AB3_Sis('problema8',0,1,800,[273 273]);  
>> plot(x,y(:,1)),grid on,xlabel('x'),ylabel('T')  
>> hold on  
>> plot(x,y(:,2))  
>> legend('T(1)', 'T(2)')
```

Figura 2.14: Representación de la solución del “Problema 8” con AB3



Fuente: Autores

Problema 9

Resuelva los siguiente literales con $0 \leq x \leq 5$ mediante el método de AB2 con $h = 0.001$

a) $y' + xy = 1, y(0) = 1$

Calculamos el valor de N . Partiendo de $h = \frac{b-a}{N}$ y despejando se obtiene $N = \frac{b-a}{h}$

Donde $N = (5 - 0)/0.01$ obteniendo el número de iteraciones $N = 500$

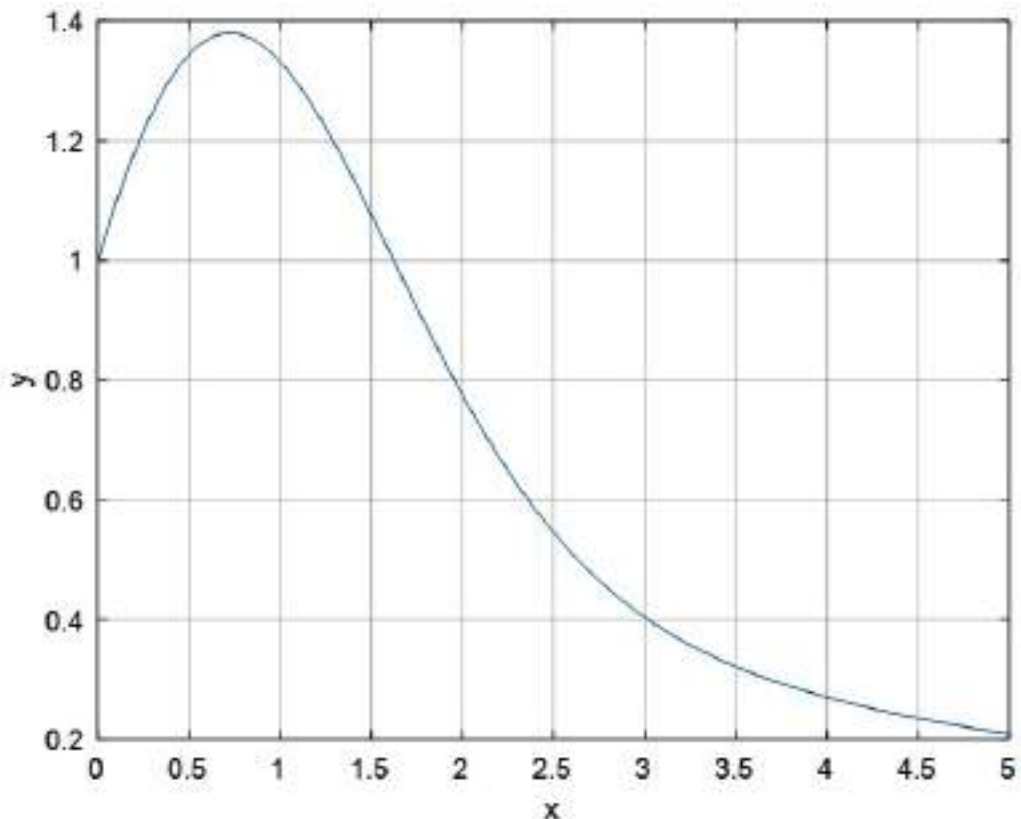
Creamos la función

```
function f= problema9a(x,y)
    f=1-x.*y;
end
```

llamamos al método AB2 para graficar la solución

```
>> [x,y]= AB2_Ecu('problema9a',0,5,500,1);
>> plot(x,y(:,1)),grid on,xlabel('x'),ylabel('y')
```

Figura 2.15: Representación de la solución del “Problema 9a” con AB2



Fuente: Autores

b) $y' + 3y = e^{-x}, y(0) = 1$

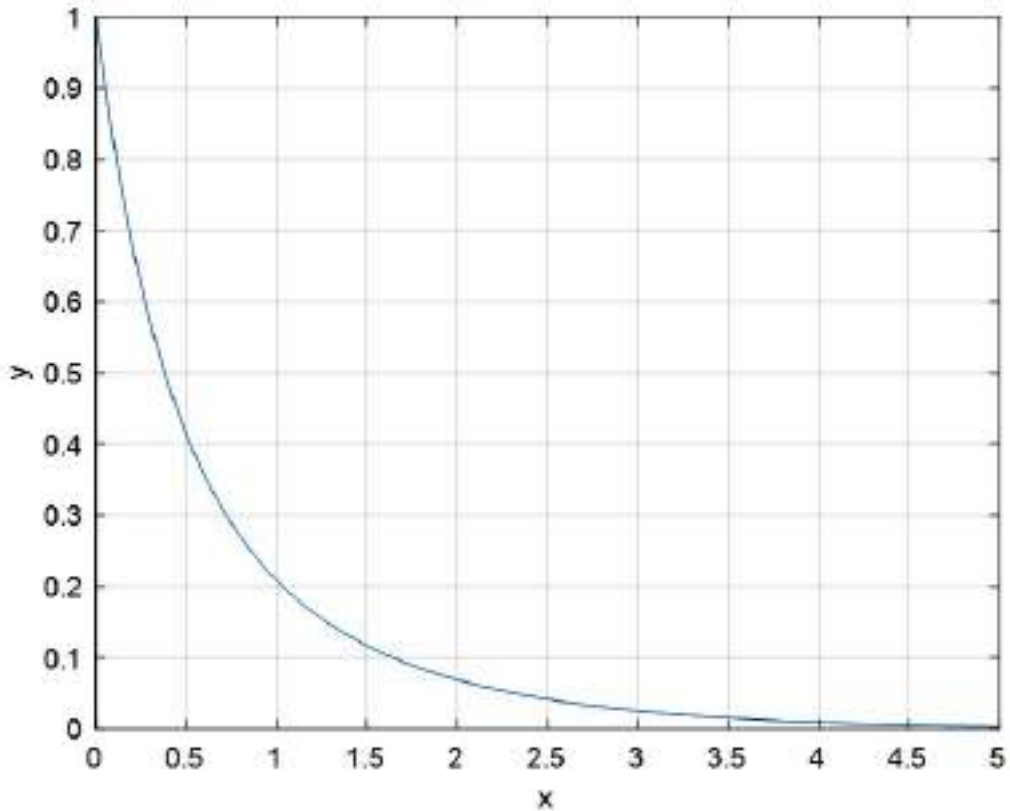
Creamos la función

```
function f= problema9b(x,y)
    f=exp(-x)-(3*y);
end
```

Llamamos al método AB2 para graficar la solución.

```
>> [x,y]= AB2_Ecu('problema9b',0,5,500,1);
>> plot(x,y(:,1)),grid on,xlabel('x'),ylabel('y')
```

Figura 2.16: Representación de la solución del “Problema 9b” con AB2



Fuente: Autores

c) $y' = (x^2 - y), y(0) = 0.5$

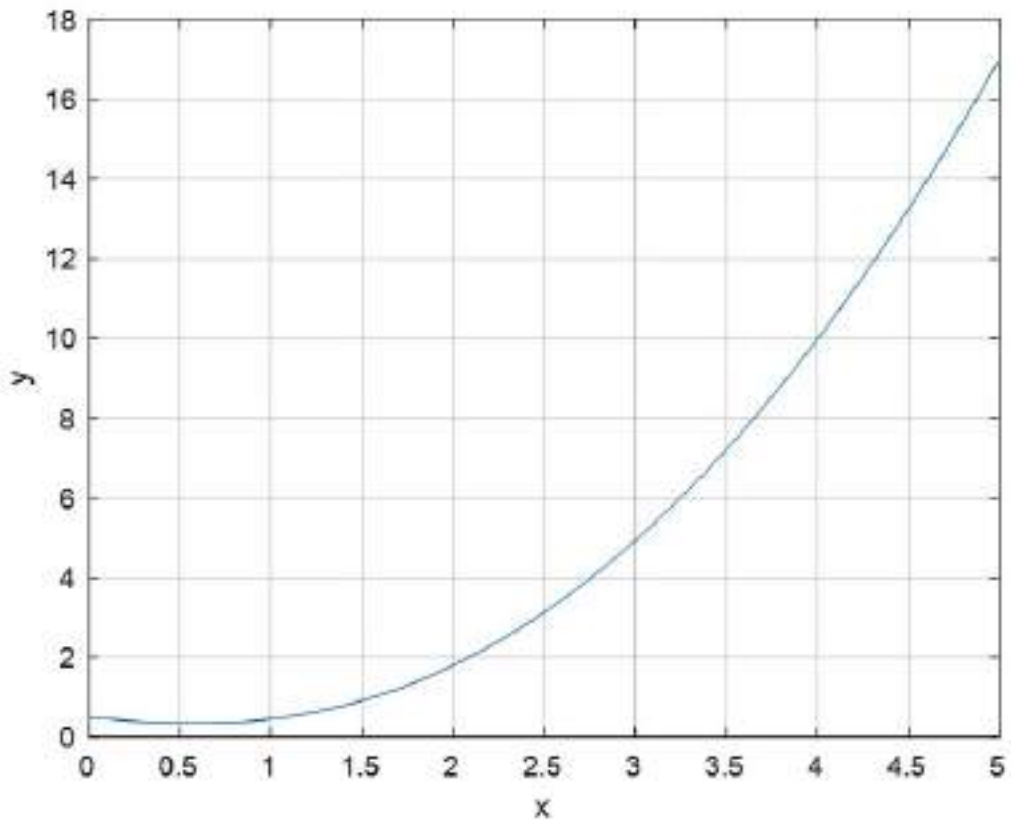
Creamos la función

```
function f= problema9c(x,y)
    f=x^2-y;
end
```

Llamamos al método AB2 para graficar la solución.

```
>> [x,y]= AB2_Ecu('problema9c',0,5,500,0.5);
>> plot(x,y(:,1)),grid on,xlabel('x'),ylabel('y')
```

Figura 2.17: Representación de la solución del “Problema 9c” con AB2



Fuente: Autores

d) $y' + x^{1/2} - y, y(0) = 0.5$

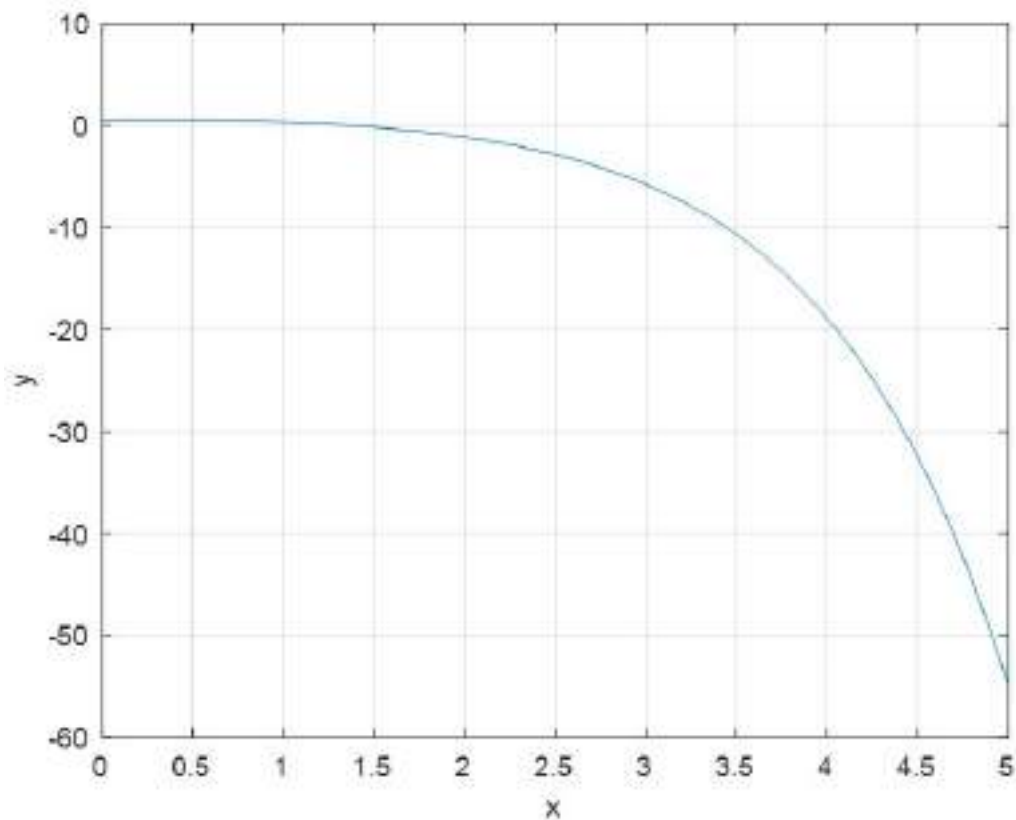
Procedemos a crear a función

```
function f= problema9d(x,y)
    f=y-x.^(1/2);
end
```

Llamamos al método AB2 para graficar la solución.

```
>> [x,y]= AB2_Ecu('problema9d',0,5,500,0.5);  
>> plot(x,y(:,1)),grid on,xlabel('x'),ylabel('y')
```

Figura 2.18: Representación de la solución del “Problema 9d” con AB2



Fuente: Autores

Problema 10

Resuelva $y''(t) - 0.05 y'(t) + 0.15 y(t) = 0$, $y'(0) = 0$ $y(0) = 1$ y determine los valores y la solución grafica de $y(1)$ y $y(2)$ con AB3 con $h = 0.5$ y $0 \leq t \leq 1$

Solución

$$y''(t) = 0.05y'(t) - 0.15y(t), y'(0) = 0, y(0) = 1$$

Transformamos en un sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden

$$\begin{aligned}y &= z_1 \\ y' &= z'_1 = z_2 \\ y'' &= z''_1 = z'_2 \\ y''(t) &= 0.05 y'(t) - 0.15 y(t) \rightarrow z'_2 = 0.05 z_2 - 0.15 z_1\end{aligned}$$

Procedemos a crear la función en *Matlab*

```
function f= problema10(t,z)
    f=[z(2);0.05.*z(2)-0.15.*z(1)];
end
```

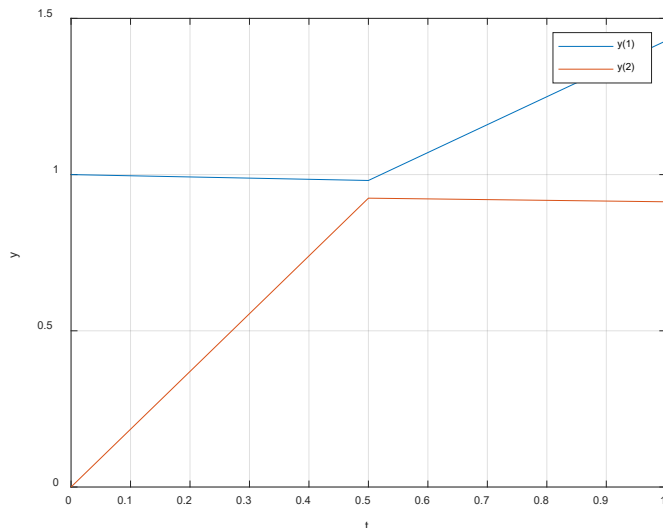
Calculamos el valor de N . Partiendo de $h = \frac{b-a}{N}$ y despejando se obtiene $N = \frac{b-a}{h}$

Donde $N = (1-0)/0.5$ obteniendo el número de iteraciones $N = 2$

Graficamos la solución de $y(1)$ y $y(2)$

```
>> [x,y]= AB3_Sis('problema10',0,1,2,[1 0]);
>> plot(x,y(:,1)),grid on,xlabel('t'),ylabel('y')
>> hold on
>> plot(x,y(:,2))
>> legend('y(1)', 'y(2)')
```

Figura 2.19: Representación de la solución del “Problema 10” con AB3



Fuente: Autores

Valores $y(1)$ y $y(2)$

t	0	0.5	1
$y(1)$	1	0.9812	1.4278
$y(2)$	0	0.9245	0.9129

Problema 11

Sea la ecuación logística

$$\frac{dp}{dt} = ap - bp^2, \quad p(0) = p_0$$

Que se usa para modelar el crecimiento de poblaciones. Un modelo más general es la ecuación

$$\frac{dp}{dt} = ap - bp^r, \quad p(0) = p_0$$

Donde $r > 1$. Para ver el efecto cambiar el parámetro r , tome $a = 3$, $b = 1$ y $P_0 = 1$. Utilice ahora el método de AB3 con $h = 0.25$ para aproximar la solución en el intervalo $0 \leq t \leq 5$ para $r = 1.5, 2$ y 3

Solución

Creamos la función

```
function f= problema11(t,p)
    r=3;%1.5 2
    a=3;
    b=1;
    f=a.*p-b*p.^r;
end
```

Calculamos el valor de N . Partiendo de $h = \frac{b-a}{N}$ y despejando se obtiene $N = \frac{b-a}{h}$

Donde $N = (5-0)/0.25$ obteniendo el número de iteraciones $N = 20$

Procedemos a llamar a la función y graficamos los resultados para

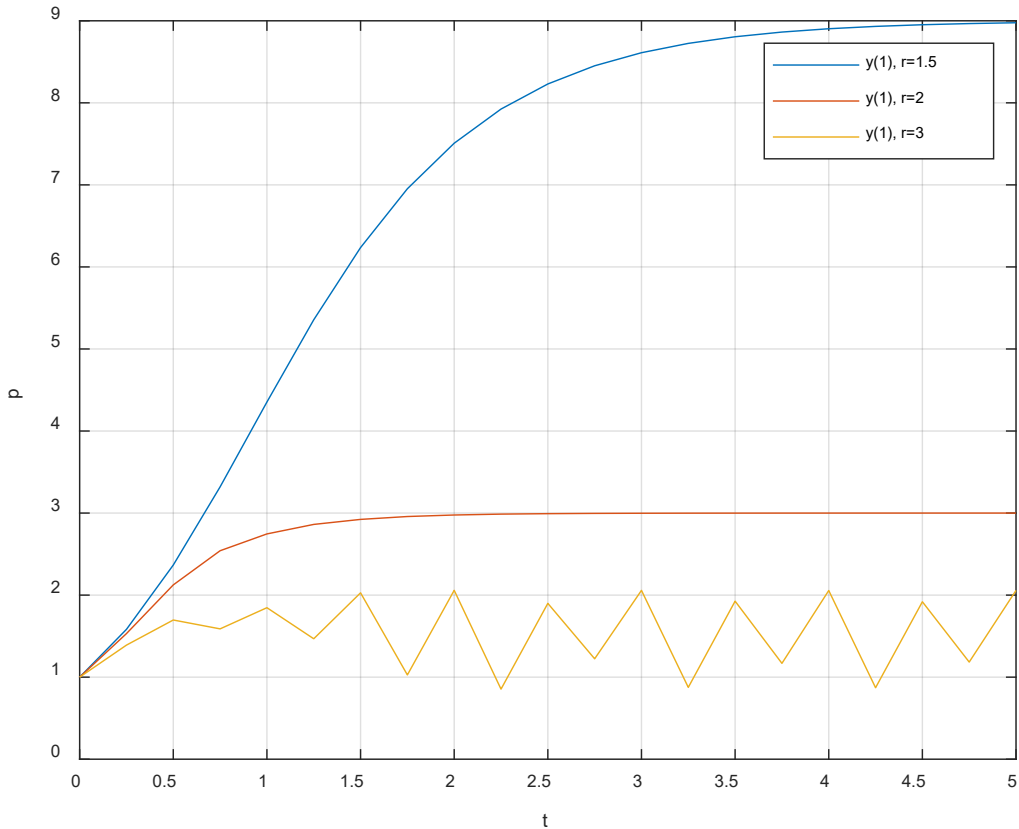
```
>> [x,y]= AB2_Ecu('problema11',0,5,20,1);
>> plot(x,y(:,1)),grid on,xlabel('t'),ylabel('p')
>> plot(x,y(:,1)),grid on,xlabel('t'),ylabel('p')
>> hold on
```

```

>> [x,y]= AB2_Ecu('problema11',0,5,20,1);
>> plot(x,y(:,1))
>> [x,y]= AB2_Ecu('problema11',0,5,20,1);
>> plot(x,y(:,1))
>> legend ('y(1), r=1.5', 'y(1), r=2', 'y(1), r=3')

```

Figura 2.20: Representación de la solución del “Problema 11” con AB2



Fuente: Autores

Problema 12

La velocidad de un cuerpo en caída se modela mediante el problema de valor inicial

$$m \frac{dv}{dt} = mg - kv, \quad v(0) = v_0$$

De acuerdo con la hipótesis de que la fuerza debida a la resistencia del aire es $-kv$ sin embargo en ciertos casos la fuerza originada por la resistencia del aire se comporta más como $-kv^r$ donde $r > 1$ es alguna constante. Esto da el modelo

$$m \frac{dv}{dt} = mg - kv^r, \quad v(0) = v_0$$

Para estudiar el efecto de cambiar el parámetro r , $m = 1$, $g = 9.81$, $k = 2$ y $v_0 = 0$. Utilice el método AB3 con $h = 0.2$ par aproximar a la solución en el intervalo $0 \leq t \leq 5$ para $r = 1, 1.5$ y 2 .

Solución

$$\frac{dv}{dt} = \frac{mg - kv^r}{m}$$

Creamos la función

```
function f= problema12(t,v)
    m=1;
    g=9.81;
    k=2;
    r=1;%1.5 2
    f=(m.*g-k.*v.^r)./m;
end
```

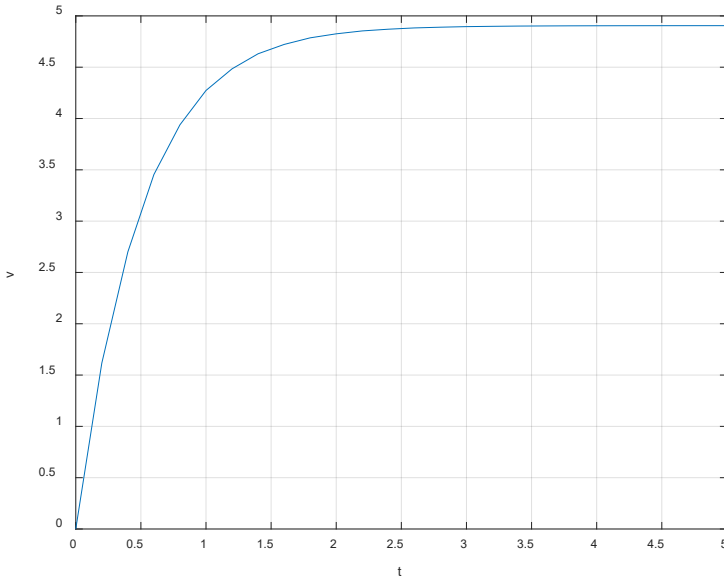
Calculamos el valor de N . Partiendo de $h = \frac{b-a}{N}$ y despejando se obtiene $N = \frac{b-a}{h}$

Donde $N = (5-0)/0.2$ obteniendo el número de iteraciones $N = 25$

Procedemos a llamar a la función y graficamos los resultados para $r = 1$

```
>> [x,y]= AB3_Ecu('problema12',0,5,25,0);
>> plot(x,y(:,1)),grid on,xlabel('t'),ylabel('v')
```

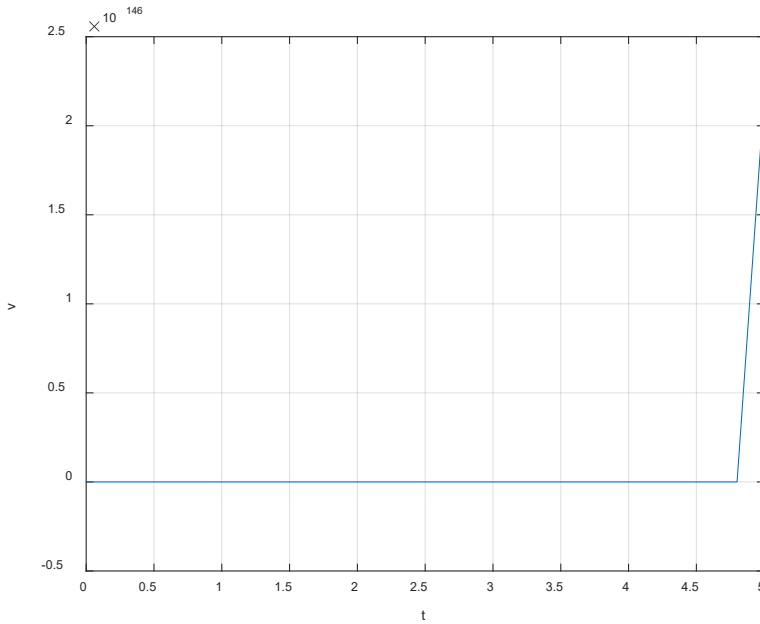
Figura 2.21: Representación de la solución del “Problema 12” con AB2 para $r = 1$



Fuente: Autores

Graficamos los resultados para $r = 1.5$

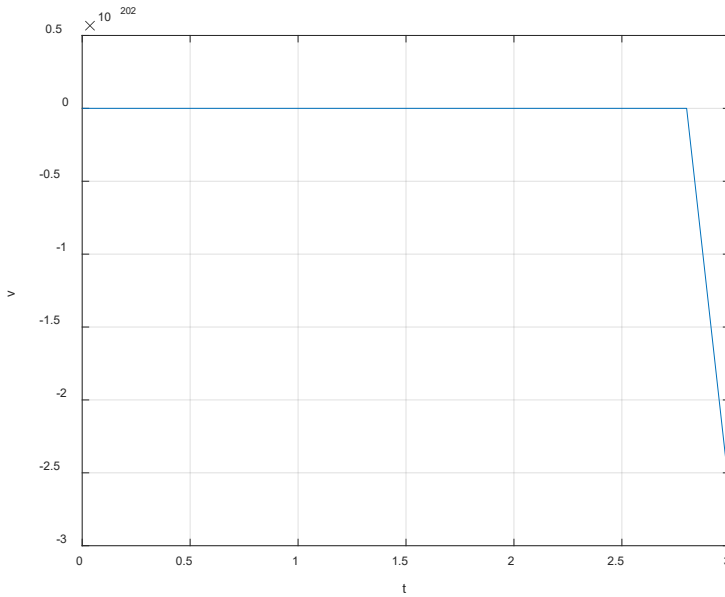
Figura 2.22: Representación de la solución del “Problema 12” con AB2 para $r = 1.5$



Fuente: Autores

Graficamos los resultados para $r = 2$

Figura 2.23: Representación de la solución del “Problema 12” con AB2 para $r = 2$



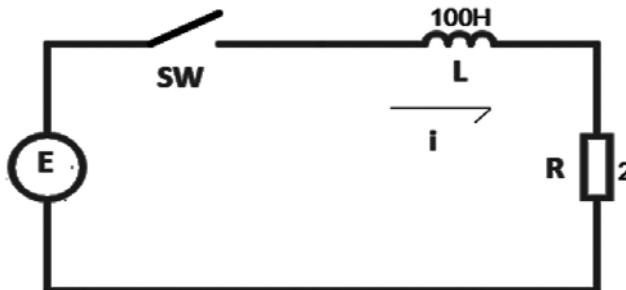
Fuente: Autores

Problema 13

En la figura se muestra un circuito, en la cual tiene una auto inductancia de 100 henrys, una resistencia de $R = 2$ ohmios y una fuente de voltaje de $E = 10$ voltios. Si el circuito se cierra en el instante $t = 0$, la corriente $I(t)$ cambia según la fórmula

$$L \frac{d}{dt} I(t) + RI(t) = E(t), \quad I(0) = 0$$

Figura 2.24: Circuito LC



Fuente: Autores

- a) Determine la corriente $I(t)$ en $t = 1, 2, 3, 4$ y 5 seg mediante el método de AB4 y $h = 0.01$

$$\frac{d}{dt}I(t) = \frac{E(t) - RI(t)}{L}$$

Escribimos la función

```
function f= problema13(t,i)
    R=2;
    E=10;
    L=100;
    f=(E-R.*i)./L;
end
```

Calculamos el valor de N . Partiendo de $h = \frac{b-a}{N}$ y despejando se obtiene $N = \frac{b-a}{h}$

Donde $N = (5-0)/0.01$ obteniendo el número de iteraciones $N = 500$

Para encontrar los valores los valores para $t \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$ encontramos las posiciones

	b - a	N+1
	Posicion - a	x
• 1 5 501 1 x = 100.2 →202	• 2 5 501 2 x = 200.4 →201	• 3 5 501 3 x = 300.6 →301
• 4 5 501 4 x = 400.8 →401	• 5 5 501 5 x = 501	

Procedemos a encontrar los puntos $t \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$ y graficar su solución

```
>> [x,y]= AB4_Ecu('problema13',0,5,500,0);
>> plot(x,y(:,1)),grid on,xlabel('t'),ylabel('i')
>> X = [x(101) x(201) x(301) x(401) x(501)]
X =
```

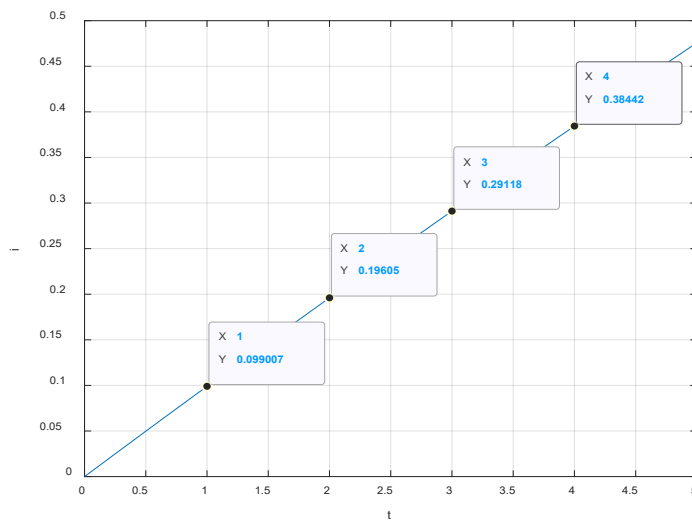
```

1 2 3 4 5
>> Y = [y(101) y(201) y(301) y(401) y(501)]
Y =
0.0990 0.1961 0.2912 0.3844 0.4758
    
```

Obteniendo así los valores de:

t	1	2	3	4	5
$i(t)$	0.0990	0.1961	0.2912	0.3844	0.4758

Figura 2.25: Representación de la solución del “Problema 13” con AB4



Fuente: Autores

- b) Evalúe el error comparando la solución numérica con la solución analítica, dada por $I(t) = \left(\frac{E}{R}\right)(1 - e^{-\frac{Rt}{L}}) = 5$

Procedemos a ingresar la solución exacta en *Matlab*

```

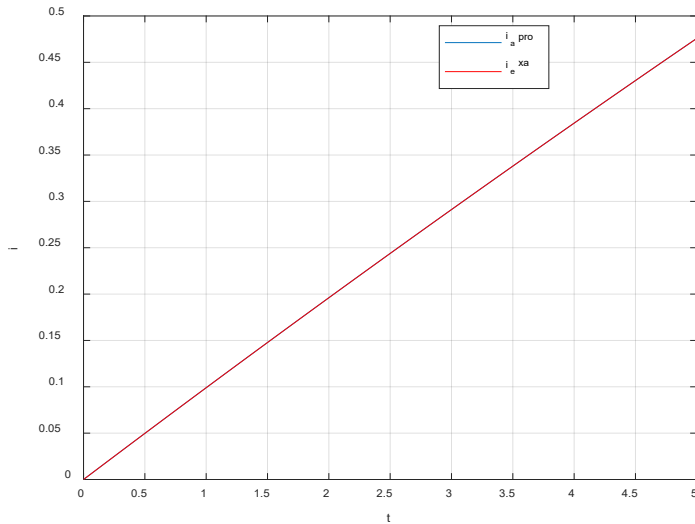
>> yexacta=5*(1-exp(-2*x./100));
>> Maxerror=max(abs(y-yexacta))
Maxerror =
8.3267e-16
    
```

Graficamos la solución exacta versus la aproximada

```

>> hold on
>> plot(x,yexacta,'red'),legend('i_apro','i_exa')
    
```

Figura 2.26: Representación de la solución exacta Vs la solución aproximada con AB4



Fuente: Autores

c) Analice el efecto de repitiendo los cálculos anteriores, pero con $h = 0.1$

Calculamos el valor de N . Partiendo de $h = \frac{b-a}{N}$ y despejando se obtiene $N = \frac{b-a}{h}$

Donde $N = (5-0)/0.1$ obteniendo el número de iteraciones $N = 50$

Para encontrar los valores los valores para $t \in \{1,2,3,4,5\}$ encontramos las posiciones

b - a		N+1	
Posicion - a		x	
• 1 5 51 1 x = 10.2 → 11	• 2 5 51 2 x = 20.4 → 21	• 3 5 51 3 x = 30.6 → 31	
• 4 5 51 4 x = 40.8 → 41	• 5 5 51 5 x = 10.2 → 51		

Llamamos al método para encontrar los puntos $t \in \{1,2,3,4,5\}$ con $h = 0.1$

>> [x,y]= AB4_Ecu('problema13',0,5,50,0);

```
>> plot(x,y(:,1)),grid on,xlabel('t'),ylabel('i')
>> X = [x(11) x(21) x(31) x(41) x(51)]
X =
    1    2    3    4    5
>> Y = [y(11) y(21) y(31) y(41) y(51)]
Y =
    0.0990    0.1961    0.2912    0.3844    0.4758
```

t	1	2	3	4	5
$i(t)$	0.0990	0.1961	0.2912	0.3844	0.4758

Al analizar los puntos $t \in \{1,2,3,4,5\}$ para $h = 0.1$ y $h = 0.01$ podemos identificar que la corriente para ambos casos son los mismos lo que podemos identificar es que cambia el número de muestras de 500 a 50 y el método AB4 se aproxima a la solución con un margen de error de $8.3267e-16$.

Problema 14

Un tubo con forma de U y $0.05m$ de radio se llena con agua, pero con una división de forma que el nivel del agua en la parte vertical de la izquierda es de $0.2m$ mas alto que el de la parte vertical derecha. En el instante $t = 0$ se retira la división. el nivel del agua de la parte izquierda y_A , medido desde el plano intermedio entre las dos superficies satisface la ecuación

$$Ly''_A = -2gy_A$$

Donde L es la longitud total del agua en el tubo que se supone que mide $1m$ mientras que $g = 9.8 m/s^2$. Si se desprecia la fricción en el tubo, calcule el nivel del agua por medio del método de AB4 para $0 < t < 10$ seg y determine cuando alcanza y_A su máximo y mínimo. Utilice $h = 0.001$

Solución

$$y''_A = \frac{-2gy_A}{L}$$

Transformamos en un sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden

$$y_A = z_1$$

$$y'_A = z'_1 = z_2$$

$$y''_A = z''_1 = z'_2$$

$$y''_A = \frac{-2gy_A}{L} \rightarrow z'_2 = \frac{-2gz_1}{L}$$

Creamos la función en *Matlab*

```
function f= problema14(t,z)
    L=1;
    g=9.8;
    f=[z(2);(-2.*g.*z(1))./L];
end
```

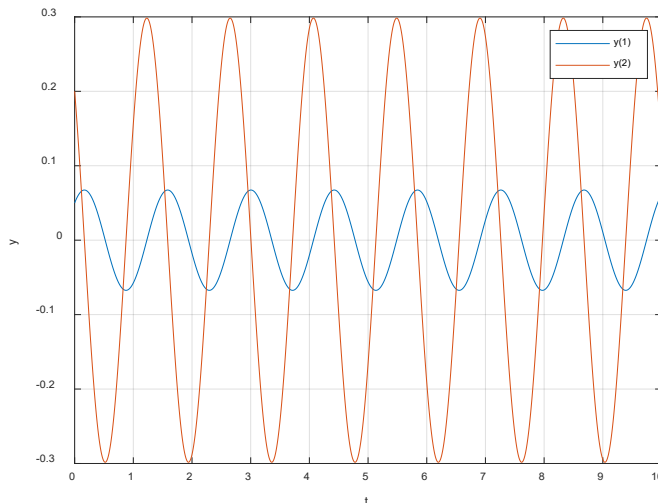
Calculamos el valor de N . Partiendo de $h = \frac{b-a}{N}$ y despejando se obtiene $N = \frac{b-a}{h}$

Donde $N = (10-0)/0.001$ obteniendo el número de iteraciones $N = 10000$

Ahora graficamos la solución con AB4

```
>> [x,y]=AB4_Sis('problema14',0,10,10000,[0.05 0.2]);
>> plot(x,y(:,1)),grid on,xlabel('t'),ylabel('y')
```

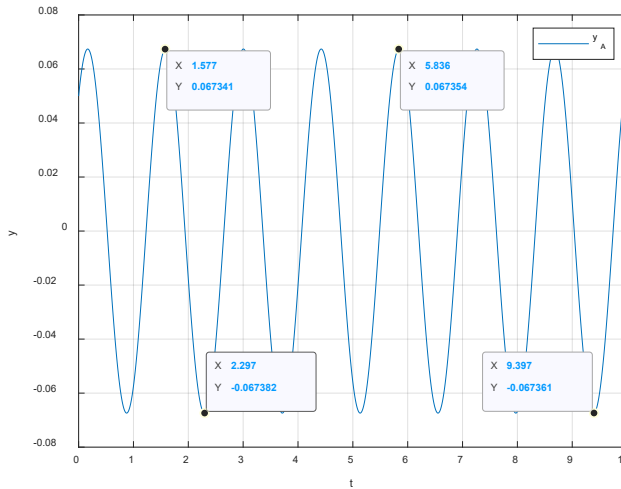
Figura 2.27: Representación de la solución del “Problema 14” con AB4



Fuente: Autores

Ahora determinamos los valores máximos y mínimos de y_A

Figura 2.28: Representación de la solución de valores máximos y mínimos de



Fuente: Autores

Problema 15

Repita el problema 14 suponiendo la existencia de fricción en el tubo de forma que la ecuación de movimiento es:

$$Ly''_A = -2gy_A - \beta y'_A$$

Donde $\beta = 0.8$ m/seg. Utilice $h = 0.001$

Solución

$$y''_A = \frac{-2gy_A - \beta y'_A}{L}$$

Transformamos en un sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden

$$\begin{aligned} y_A &= z_1 \\ y'_A &= z'_1 = z_2 \\ y''_A &= z'_2 = z'_2 \\ y''_A &= \frac{-2gy_A}{L} \rightarrow z'_2 = \frac{-2gz_1 - \beta z_2}{L} \end{aligned}$$

Creamos la función en *Matlab*

```
function f= problema15(t,z)
    L=1;
    g=9.8;
    b=0.8;
    f=[z(2);(-2.*g.*z(1)-b*z(2))./L];
end
```

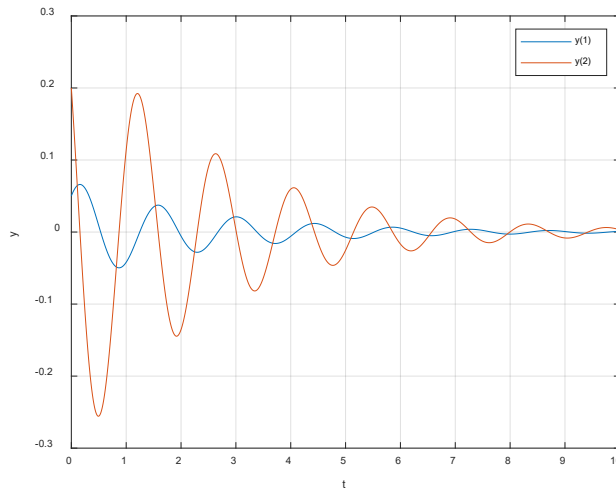
Calculamos el valor de N . Partiendo de $h = \frac{b-a}{N}$ y despejando se obtiene $N = \frac{b-a}{h}$

Donde $N = (10-0)/0.001$ obteniendo el número de iteraciones $N = 10000$

Ahora graficamos la solución con AB4

```
>> [x,y]=AB4_Sis('problema15',0,10,10000,[0.05 0.2]);
>> plot(x,y(:,1),x,y(:,2)),grid on,xlabel('t'),ylabel('y')
>> plot(x,y(:,1),x,y(:,2)),grid on,xlabel('t'),ylabel('y')
>> legend('y(1)', 'y(2)')
```

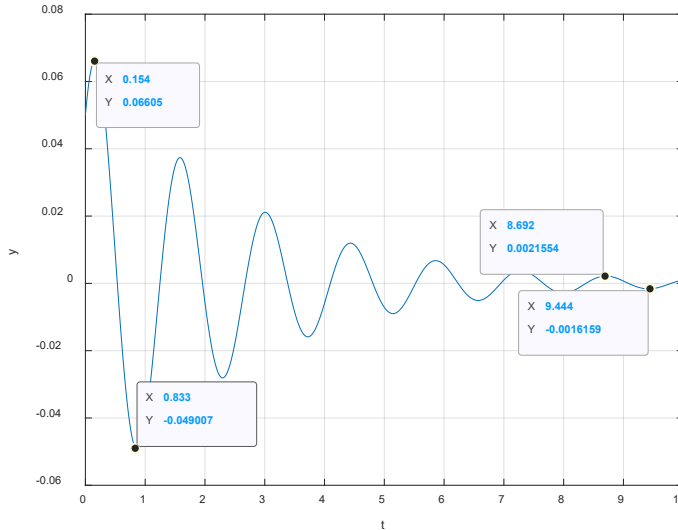
Figura 2.29: Representación de la solución del “Problema 15” con AB4



Fuente: Autores

Ahora determinamos los valores máximos y mínimos de y_A

Figura 2.30: Representación de la solución de valores máximos y mínimos de y_A



Fuente: Autores

Problema 16

La densidad numérica (número de átomos por cm^3) del yodo -135 (radioisótopo) satisface la ecuación:

$$\frac{d}{dt} N_i(t) = -\lambda_i N_i(t)$$

Donde $N(t)$ es la densidad numérica del yodo -135 y λ_i es una constante de decaimiento igual a 0.1044 hora^{-1} . Si $N_i(0) = 10^5 \text{ atomos/cm}^3$ en el instante $t = 0$, calcule $N_i(t)$ en $t = 1$ horas mediante AB2 con $h = 0.05$ de hora

Solución

Procedemos a crear la función el *software*

```
function f= problema16(t,N)
    A=0.1044;
    f=-A.*N;
end
```

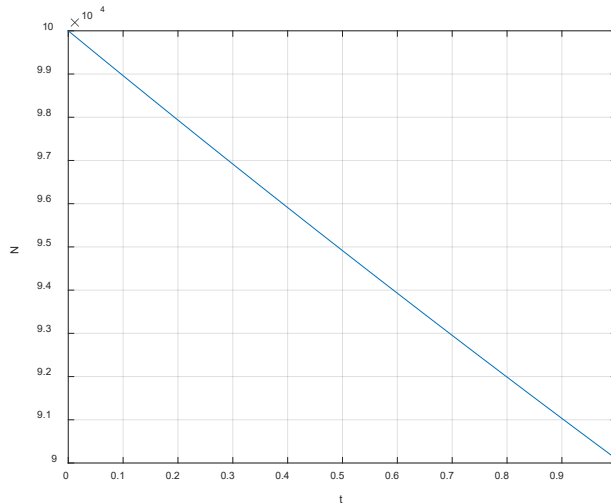
Calculamos el valor de N . Partiendo de $h = \frac{b-a}{N}$ y despejando se obtiene $N = \frac{b-a}{h}$

Donde $N = (1-0)/0.05$ obteniendo el número de iteraciones $N = 20$

Procedemos a llamar al método para encontrar la solución del problema

```
>> [x,y]= AB2_Ecu('problema16',0,1,20,10^5);
>> plot(x,y(:,1)),grid on,xlabel('t'),ylabel('N')
```

Figura 2.31: Representación de la solución del “Problema 16” con AB2



Fuente: Autores

Problema 17

El producto del decaimiento del yodo-135 es el xenón 135; también es radioactivo. su constante de decaimiento es $\lambda_x = 0.0753 \text{hrs}^{-1}$. La densidad numérica del xenón satisface la ecuación

$$\frac{d}{dt} N_x(t) = -\lambda_x N_x(t) + \lambda_i N_i(t)$$

Donde N_x es la densidad numérica del xenón y N_i es la densidad numérica del yodo, si λ_i es una constante de decaimiento igual a 0.1044hra^{-1} y $N_i(0) = 10^5$ átomos/ cm^3 supongamos que $N_x(0) = 0$, imprima la solución cada 5 horas y hasta alcanzar 50 horas. Use $h = 0.1$ hora

Solución

Se forma un sistema de ecuaciones de primer orden ya que se utiliza la ecuación del problema 16 del decaimiento del yodo-135 y la ecuación xenón 135

$$\frac{d}{dt} N_i(t) = -\lambda_i N_i(t)$$

$$\frac{d}{dt} N_x(t) = -\lambda_x N_x(t) + \lambda_i N_i(t)$$

Procedemos a crear la función en Matlab una vez detectado el sistema de ecuaciones de primer orden.

```
function f= problema17(t,Sistema)
    Ai=0.1044;
    Ax=0.0753;
    Ni=Sistema(1);
    Nx=Sistema(2);
    f=[-Ai*Ni;-Ax*Nx+Ai*Ni];
end
```

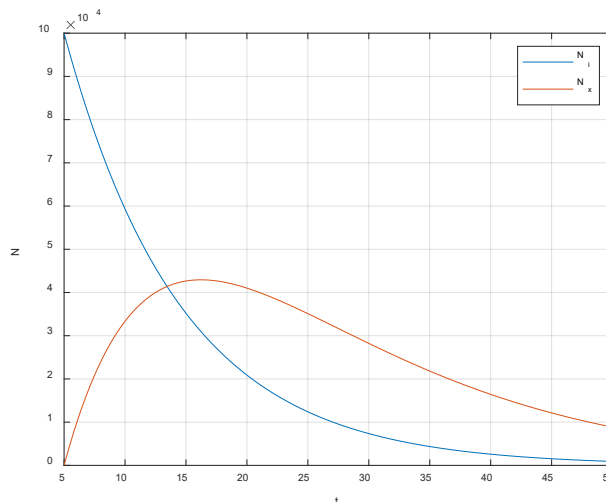
Calculamos el valor de N . Partiendo de $h = \frac{b-a}{N}$ y despejando se obtiene $N = \frac{b-a}{h}$

Donde $N = (50-5)/0.1$ obteniendo el número de iteraciones $N = 450$

Procedemos a llamar al método para graficar la solución del problema.

```
>> [x,y]=AB4_Sis('problema17',5,50,450,[10^5 0]);
>> plot(x,y),grid on,xlabel('t'),ylabel('N')
>> legend ('N_i', 'N_x')
```

Figura 2.32: Representación de la solución del “Problema 17” con AB4



Problema 18

Un tanque de 50 galones de agua contiene sal con una concentración de 10 onzas/galón. Con el fin de diluir el contenido de sal, se suministra agua pura a razón de 2 galones/minuto. Si el depósito tiene una mezcla uniforme y la misma cantidad de agua que entra sale del depósito cada minuto, la concentración de sal satisface:

$$y'(t) = -\frac{2}{50} y, \quad y(0) = 10$$

Donde $y(t)$ es la concentración de sal en onzas/galón y t es el tiempo en minutos. Utilice AB3 con $h = 1$ minutos para determinar cuanto tiempo debe transcurrir para que la concentración de la sal sea $1/10$ de su valor inicial.

Solución

$$y'(t) = -\frac{2}{50} y, \quad y(0) = 10, \quad t \in [0, 100]$$

Creamos la función en *Matlab*

```
function f= problema18(t,y)
    f=-2./50.*y;
end
```

Para determinar el intervalo del tiempo del problema menciona el tiempo inicial $t = 0$ el tiempo final lo determinamos de 100 a 200 minutos dependiendo ya quedemos encontrar el tiempo que transcurre cuando la concentración de sal es 0.1.

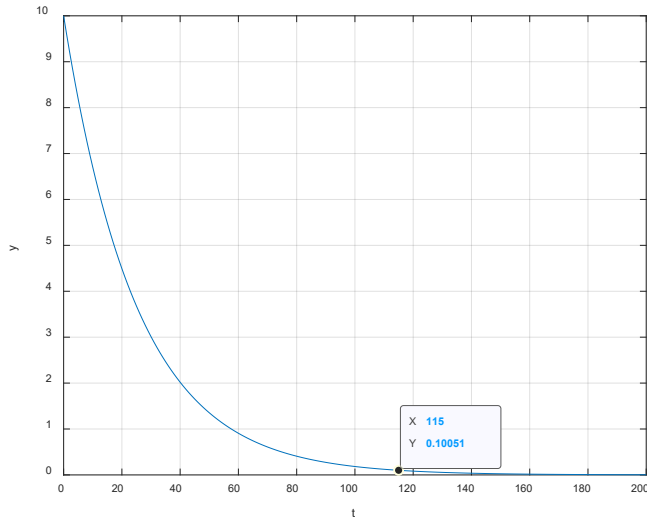
Calculamos el valor de N . Partiendo de $h = \frac{b-a}{N}$ y despejando se obtiene $N = \frac{b-a}{h}$

Donde $N = (200-0)/1$ obteniendo el número de iteraciones $N = 200$

Una vez creada la función procedemos a llamar al método para encontrar la solución.

```
>> [x,y]= AB3_Ecu('problema18',0,100,100,10);
>> plot(x,y),grid on,xlabel('t'),ylabel('y')
```

Figura 2.33: Representación de la solución del “Problema 18” con AB4



Fuente: Autores

Observando la gráfica determinamos que tiene que transcurrir 115 minutos para tener una concentración de la sal $1/10$

Problema 19

Un tanque de 50 galones de agua contiene sal con una concentración de 10 onzas/galón. Con el fin de diluir el contenido de sal, se suministra agua pura a razón de 2 galones/minuto. Si el depósito tiene una mezcla uniforme y la misma cantidad de agua que entra sale del depósito cada minuto, la concentración de sal satisface:

$$y_1'(t) = -\frac{2}{50} y_1, \quad y_1(0) = 10$$

El agua que sale del tanque entra a otro tanque de 20 galones, en el cual también se vierte agua pura a razón de y se mezcla bien. La concentración de sal en el segundo tanque satisface

$$y_2'(t) = -\frac{3}{20} y_2(t) + \frac{2}{20} y_1(t), \quad y_2(0) = 0$$

Donde $y_1(t)$ es la concentración de sal del tanque de 50 galones Utilice AB3 con $h = 1$ minutos. Supóngase que el segundo tanque tiene agua pura en el instante $t = 0$. Determine cuando alcanza la concentración de sal en el tanque de 20 galones.

Partimos del sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden

$$y_1'(t) = -\frac{2}{50} y_1, \quad y_1(0) = 10$$

$$y_2'(t) = -\frac{3}{20} y_2(t) + \frac{2}{20} y_1(t), \quad y_2(0) = 0$$

Creamos la función en Matlab

```
function f= problema19(t,Sistema)
    y1=Sistema (1);
    y2=Sistema (2);
    f=[-2./50.*y1;-3./20.*y2+2./20.*y1];
end
```

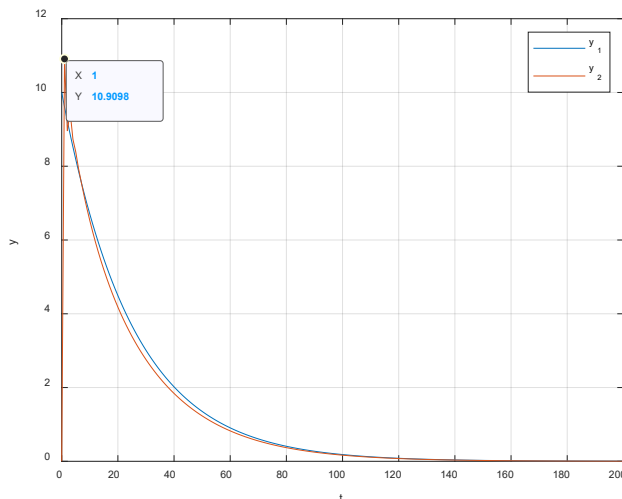
Calculamos el valor de N . Partiendo de $h = \frac{b-a}{N}$ y despejando se obtiene $N = \frac{b-a}{h}$

Donde $N = (10-0)/1$ obteniendo el número de iteraciones $N = 10$

Procedemos a llamar al método para encontrar la solución

```
>> [x,y]= AB3_Sis('problema19',0,200,200,[10 0]);
>> plot(x,y),grid on,xlabel('t'),ylabel('y')
>> legend ('y_1', 'y_2')
```

Figura 2.34: Representación de la solución del “Problema 19” con AB4



Su máxima concentración de sal en el tanque de 20 galones es de 10.90 onzas/galón

Problema 20

Se dispara un proyectil al aire, con un ángulo 45° de con respecto del suelo a $u = v = 150 \text{ m/seg}$, donde u y v son las velocidades horizontales y verticales, respectivamente. Las ecuaciones de movimiento están dadas por:

$$\begin{aligned}u' &= -cVu, & u(0) &= 150\text{m/s} \\v' &= -g-cVv, & v(0) &= 150\text{m/s}\end{aligned}$$

Donde u y v son las funciones del tiempo, $u = u(t)$ y $v = v(t)$ y

$$V = \sqrt{u^2 + v^2}$$

$$c = 0.005 \text{ coeficiente de arrastre}$$

$$g = 9.8 \text{ m/s}^2$$

Calcule la trayectoria del proyectil con $N = 200$

Solución

Partimos de un sistema de ecuaciones de primer orden

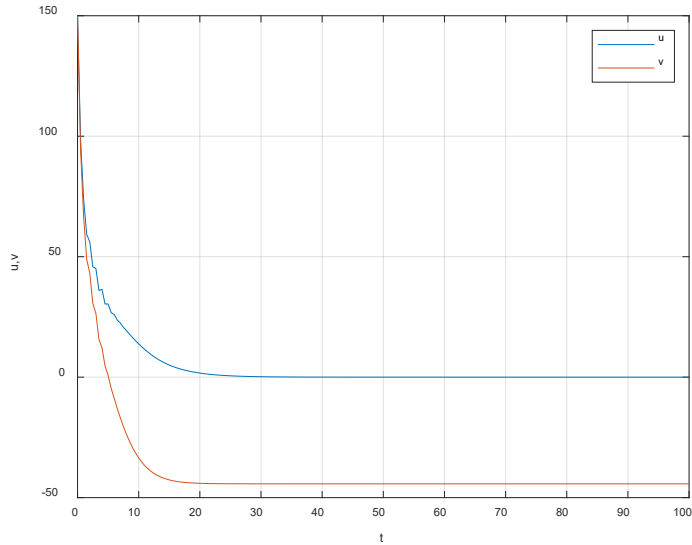
$$\begin{aligned}u' &= -cVu, & u(0) &= 150\text{m/s} \\v' &= -g-cVv, & v(0) &= 150\text{m/s}\end{aligned}$$

Creamos la función

```
function f= problema20(t,Sistema)
    u=Sistema (1);
    v=Sistema (2);
    c=0.005;
    g=9.8;
    V=sqrt(u.^2+v.^2);
    f=[-c.*V.*u;-g-(c.*V.*v)];
end
```

Llamamos al método para graficar la solución

```
>> [x,y]= AB4_Sis('problema20',0,100,200,[150 150]);
>> plot(x,y),grid on,xlabel('t'),ylabel('u,v')
>> legend ('u', 'v')
```

Figura 2.35: Representación de la solución del “Problema 20” con AB4

Fuente: Autores

2.4 EJERCICIOS PROPUESTOS

Ejercicio 1

Sea el siguiente problema de valor inicial

$$y'(x) = \cos(x) \times (y - x) \quad x \in [-\pi \ \pi]$$

Con las condiciones iniciales $y(-\pi)=0$

- Escriba una función que describa la ecuación diferencial de primer orden.
- Resuelva el PVI para el intervalo $x \in [-\pi \ \pi]$ con pasos $h = (2\pi)/10$ y represente $y(x)$ utilizando Adams-Bashforth AB2
- Indicar los valores de $y(x)$ para $x \in \{-\pi -2\pi/5, 0, 3\pi/5, \pi\}$
- Indicar una estimación del orden de convergencia

Ejercicio 2

Modelo de programación de una llama: Denotamos $y(t)$ el radio de la bola que modeliza la llama:

$$y'(x) = y^2 - y^3 \quad x \in [0 \ 200]$$

Con las condiciones iniciales

- Escriba una función que describa la ecuación diferencial de primer orden
- Resuelva el PVI para el intervalo $x \in [0, 200]$ con pasos $h = 0.01$ y representar $y(x)$ utilizando Adams-Bashforth AB2
- Indicar los valores de $y(x)$ para $x \in \{0, 30, 65, 200\}$
- Indicar una estimación del orden de convergencia

Ejercicio 3

La velocidad de desintegración del radio es proporcional a la cantidad, donde $k = 4.1 \times 10^{-4}$, $y'(x) = -k \times y(x)$ $x \in [0, 1500]$. Con las condiciones iniciales variación de la cantidad de radio existente en una respuesta de 10gr.

- Escriba una función que describa la ecuación diferencial de primer orden
- Resuelva el PVI para el intervalo $x \in [0, 1500]$ con 10 subintervalos y representar $y(x)$ utilizando Adams-Bashforth AB2
- Indicar los valores de $y(x)$ para $x \in \{0, 450, 1200, 1500\}$
- Indicar una estimación del orden de convergencia.
- Si la solución exacta es $y(x) = 10e^{-kx}$ compara gráficamente la solución exacta con dichas aproximaciones, grafica el error cometido y calcula su error máximo.

Ejercicio 4

Sea el siguiente problema de valor inicial:

$$y'(x) = -\frac{y}{3} + \frac{e^x}{3y^3} \quad x \in [0, 5]$$

Con las condiciones iniciales $y(0) = -1$

- Escriba una función que describa la ecuación diferencial de primer orden.
- Resuelva el PVI para el intervalo $x \in [0, 5]$ con $N=10$ subintervalos y representar $y(x)$ utilizando Adams-Bashforth AB2.
- Indicar los valores de $y(x)$ para $x \in \{0, 1, 4.5, 5\}$
- Indicar una estimación del orden de convergencia.

Ejercicio 5

Sea el siguiente problema de valor inicial:

$$y''(x) = -y - 2\sin(x) \quad x \in [0, 2\pi]$$

Con las condiciones iniciales $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$

- Transformar el PVI en un sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden.
- Escriba una función que describa la ecuación diferencial de segundo orden como un sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden.
- Resuelva el PVI para el intervalo $x \in [0, 2\pi]$ con paso de $h = \pi/8$ subintervalos y representar $y(x)$ utilizando Adams-Bashforth AB4.
- Indicar una estimación del orden de convergencia.

Ejercicio 6

El oscilador de van der Pol es un oscilador con amortiguamiento no lineal, cuya expresión es:

$$y''(x) = u(1-y^2)y' - y \quad x \in [0, 20]$$

Con las condiciones iniciales $y(0) = 2$, $y'(0) = 0$

- Transformar el PVI en un sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden
- Escriba una función que describa la ecuación diferencial de segundo orden como un sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden.
- Resuelva el PVI para el intervalo $x \in [0, 20]$ con paso de $h = 0.1$ subintervalos y representar $y(x)$ utilizando Adams-Bashforth AB4.
- Indicar los valores de $y(x)$ para $x \in \{0, 8, 14, 16, 20\}$

Ejercicio 7

La distribución de potencial a lo largo de una línea satisface el problema de valor inicial

$$y''(x) = y(x) \quad x \in [0, L]$$

Con las condiciones iniciales $y(0) = 0.1$, $y'(0) = 0$

- Transformar el PVI en un sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden.
- Escriba una función que describa la ecuación diferencial de segundo orden como un sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden.
- Resuelva el PVI cuando la longitud $L = 1m$, determinando el potencial cada 2cm.

Representar $y(x)$ utilizando Adams-Bashforth AB4.

Ejercicio 8

Una boya cilíndrica de peso de 100kg, flota parcialmente sumergida en posición recta. Cuando es ligeramente separada de su posición de equilibrio, la boya sube y baja según la siguiente ecuación.

$$y''(x) = \frac{g}{100} [-16\pi y - cy'] \quad x \in [0 \ 12]$$

Con las condiciones iniciales $y(0)=0.0$, $y'(0)=1$

- Transformar el PVI en un sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden
- Escriba una función que describa la ecuación diferencial de segundo orden como un sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden.
- Resuelva el PVI para el intervalo $x \in [0,12]$ con $N = 40$ subintervalos y represente $y(x)$ Adams-Bashforth AB4.
- Indicar los valores de $y(x)$ para $x \in \{0,3.9,6.9,9.3,12\}$
- Indicar una estimación del orden de convergencia.

Ejercicio 9

La temperatura $y(x)$ en un anillo circular de radio interior 1 y radio exterior 3 se define por:

$$y''(x) = \frac{-y'}{x} \quad x \in [1 \ 3]$$

Con las condiciones iniciales $y(1) = 1$, $y'(1) = \frac{1}{2 \log(\frac{1}{3})}$

- Transformar el PVI en un sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden.
- Escriba una función que describa la ecuación diferencial de segundo orden como un sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden.
- Resuelva el PVI para el intervalo $x \in [1,3]$ con $N = 20$ subintervalos y represente $y(x)$ utilizando Adams-Bashforth AB4.
- Si la solución exacta es $y(x) = \frac{\log(\frac{x}{3}) - \frac{1}{2}\log x}{\log(\frac{1}{3})}$ compara gráficamente la solución con dichas aproximaciones, grafica el error cometido y calcula su error máximo
- Calcular el error exacto en $x \in \{1.8, 2.4, 2.7\}$
- Calcular el error exacto en $x \in \{1.8, 2.4, 2.7\}$

Ejercicio 10

Sea el siguiente problema de valor inicial

$$y''(x) = -2y' + x^2y \quad x \in [0, 1]$$

Con las condiciones iniciales $y(0) = 1, y'(0) = -1$

- Transformar el PVI en un sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden.
- Escriba una función que describa la ecuación diferencial de segundo orden como un sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden.
- Resuelva el PVI para el intervalo $x \in [0,1]$ con pasos $h = 0.05$ y represente $y(x)$ utilizando Adams-Bashforth AB4.
- Indicar los valores de $y(x)$ para $x = 0.8$
- Si la solución exacta es $y(x) = e^{(x-2)(x/2)}$, comparar gráficamente la solución con dichas aproximaciones, grafica el error cometido y calcula su error máximo.

MÉTODOS IMPLÍCITOS: ADAMS-MOULTON

Los métodos implícitos son más complejos que los métodos explícitos debido a que la solución en el siguiente instante de tiempo depende de sí misma, sin embargo, gozan de mayor estabilidad. Sin embargo, esta estabilidad viene al costo de la complejidad adicional en la resolución de los sistemas de ecuaciones este método Requieren el uso de algoritmos iterativos como Newton-Raphson para resolver sistemas de ecuaciones, lo que aumenta la complejidad de la implementación y puede requerir buenas aproximaciones iniciales y una cuidadosa gestión de la convergencia. En resumen, la mayor complejidad de los métodos implícitos se debe a la necesidad de resolver sistemas de ecuaciones en cada paso de tiempo, la implementación de algoritmos iterativos para asegurar la convergencia y la mayor cantidad de cálculos involucrados en comparación con los métodos explícitos. Sin embargo, esta complejidad adicional a menudo resulta en una mayor estabilidad y la capacidad de utilizar pasos de tiempo más grandes. Los puntos de los que se obtiene el polinomio interpolador son, en general los siguientes:

$$\{(t_{k-n}, f(t_{k-n}, y_{k-n})), (t_{k-n+1}, f(t_{k-n+1}, y_{k-n+1})), \dots, (t_{k+1}, f(t_{k+1}, y_{k+1}))\}$$

3.1 ADAMS-MOULTON DOS PASOS: AM2

Partiendo de dos puntos $\{(t_k, f(t_k, y_k)), (t_{k+1}, f(t_{k+1}, y_{k+1}))\}$ el polinomio interpolador que pasa por estos dos puntos es:

$$p(\tau) = f(t_{k+1}, y_{k+1}) + \frac{f(t_{k+1}, y_{k+1}) - f(t_k, y_k)}{t_{k+1} - t_k} (\tau - t_{k+1})$$

$$p(\tau) = \frac{\tau - t_k}{h} f(t_{k+1}, y_{k+1}) + \frac{t_{k+1} - \tau}{h} f(t_k, y_k)$$

Reemplazando en la integral

$$y_{k+1} = y_k + \int_{t_k}^{t_{k+1}} p(\tau) d\tau$$

$$y_{k+1} = y_k + \int_{t_k}^{t_{k+1}} \left(\frac{\tau - t_k}{h} f(t_{k+1}, y_{k+1}) + \frac{t_{k+1} - \tau}{h} f(t_k, y_k) \right) d\tau$$

$$y_{k+1} = y_k + \frac{1}{h} \int_{t_k}^{t_{k+1}} [\tau(f(t_{k+1}, y_{k+1}) - f(t_k, y_k)) - t_k f(t_{k+1}, y_{k+1}) + t_{k+1} f(t_k, y_k)] d\tau$$

$$y_{k+1} = y_k + \frac{1}{h} \left[\left(\frac{t_{k+1}^2 - t_k^2}{2} \right) (f(t_{k+1}, y_{k+1}) - f(t_k, y_k)) + (t_{k+1} - t_k)(t_{k+1}f(t_k, y_k) - t_kf(t_{k+1}, y_{k+1})) \right]$$

$$y_{k+1} = y_k + \frac{1}{h} \left[\frac{h(2t_k + h)}{2} (f(t_{k+1}, y_{k+1}) - f(t_k, y_k)) + h (t_{k+1}f(t_k, y_k) - t_kf(t_{k+1}, y_{k+1})) \right]$$

$$y_{k+1} = y_k + \left(\frac{2t_k + h}{2} - t_k \right) f(t_{k+1}, y_{k+1}) + \left(-\frac{2t_k + h}{2} - t_{k+1} \right) f(t_k, y_k)$$

$$y_{k+1} = y_k + \frac{h}{2} f(t_{k+1}, y_{k+1}) + \frac{h}{2} f(t_k, y_k)$$

De este modo, el método de Adams-Moulton de un paso, denotado por AM, tiene la expresión

$$y_{k+1} = y_k + \frac{h}{2} (f(t_{k+1}, y_{k+1}) + f(t_k, y_k))$$

Se trata de un método de segundo orden con un error global $O(h^2)$. Al ser un método implícito, vamos a necesitar resolver la ecuación no lineal:

$$g(y_{k+1}) = 0 \Leftrightarrow y_{k+1} - y_k - \frac{h}{2} (f(t_{k+1}, y_{k+1}) + f(t_k, y_k)) = 0$$

Para obtener el valor de y_{k+1} . Como método de resolución, utilizaremos el método de Newton. Sin embargo, para utilizar este método es necesario calcular la derivada de la función a resolver de modo que:

$$g'(y_{k+1}) = \frac{dg(y_{k+1})}{dy_{k+1}} = 1 - \frac{h}{2} \frac{df(t_{k+1}, y_{k+1})}{dy_{k+1}}$$

Este hecho implica que la función $y' = f(t, y(t))$ que introducimos va a tener dos parámetros de salida. El primero de ellos será $f(t, y(t))$ y el segundo será

$$\frac{df(t, y(t))}{dy(t)}$$

3.1.1 Algoritmo de Adams- Moulton AM2

Para la construcción del algoritmo de AB2 consideramos

- Obtención de la variable independiente discretizada.
- Inicialización del vector solución
- Para $k = 1: N$
 - Valor de $k1 = f(t(k), y(k))$
 - Valor de $k2 = f(t(k)+h/2, y(k) + h/2*k1)$
 - Valor de $y(k+1) = y(k)+(k1+k2)/2$
- Fin para k
- Para $k = 2:N$
 - Método de newton
- Prepara datos de salida

De esta manera construimos el código en *Matlab* para Adams Moulton de orden 2 para ecuaciones.

```
function [x,y]=AM2_Ecu(fun,a,b,N,y0)
% Código en Matlab para resolver un PVI por el método de Adams-Moulton de dos pasos
% Entrada: fun -> función f(x,y) que devuelve f y df/dy
h=(b-a)/N;
x=a:h:b;
x=x(:); % pone en columnas
y=zeros(N+1,1);%matriz de ceros en columna
y(1)=y0;
% Primer paso con el método de Heun
for k=1:N
    k1=h*feval(fun,x(1),y(1));
    k2=h*feval(fun,x(2),y(1)+k1);
    y(2)=y(1)+k1/2+k2/2;
end
```

```

% Resto de pasos con AM2
for k=2:N
    k1=feval(fun,x(k),y(k));
% Método de Newton
    iter=1; dif=1;
    w0=y(k);
    while and(iter<10,dif>1e-6)
        [fw0,dfw0]=feval(fun,x(k+1),w0);
        g=w0-y(k)-h/2*(fw0-k1);
        dg=1-h/2*dfw0;
        w=w0-g/dg;
        dif=abs(w-w0);
        iter=iter+1;
        w0=w;
    end
    y(k+1)=y(k)+h/2*(feval(fun,x(k+1),w0)+k1);% paso orden 2
end

```

3.1.2 Algoritmo de Adams- Moulton AM2 para Sistemas de Ecuaciones

Para la construcción del algoritmo de AM2 para sistemas de ecuaciones consideramos

- Obtención de la variable independiente discretizada.
- Inicialización del vector solución
- Para $k = 1:N$
 - Valor de $k1 = f(t(k), y(k))$
 - Valor de $k2 = f(t(k) + h/2, y(k) + h/2*k1)$
 - Valor de $(k+1) = y(k) + (k1+k2)/2$
- Fin para k
- Para $k = 2:N$

Método de newton

- Prepara datos de salida

De esta manera construimos el código en Matlab para Adams Moulton de orden 2 para sistemas de ecuaciones.

```
function [t,y]=AM2_Sist(fun,a,b,N,Ya)
h=(b-a)/N;    %tamaño de paso
t=a:h:b;
y(1,:)=Ya;
k1=h*feval(fun,t(1),y(1,:))';
k2=h*feval(fun,t(2),y(1,:)+k1)';
y(2,:)=y(1,:)+k1/2+k2/2;
for k=2:N
    k1=feval(fun,t(k),y(k,:));
    iter=1;
    dif=1;
    W0=y(k,:);
    while and(iter<10,dif>1e6)
        [FW0,dFW0]=feval(fun,t(k+1),W0);
        G=W0-y(k,:)-h/2*(FW0-k1);
        dG=1-h/2*dFW0;
        W=W0-dG\G;
        dif=norm(W-W0);iter=iter+1;
        W0=W;
    end
    y(k+1,:)=y(k,:)+h/2*(feval(fun,t(k+1),W0)+k1);
    t=t(:);
end
```

3.2 ADAMS-MOULTON DE MÁS DE DOS PASOS

Procedimiento de una forma análoga como el caso de dos puntos para el polinomio de interpolación, se puede obtener expresiones del método de Adams Moulton con mayor precisión utilizando más puntos en el polinomio de interpolación. Por ejemplo, para 3 puntos tendríamos el método de dos pasos AM3 cuya expresión es:

$$y_{k+1} = y_k + \frac{h}{12} (-f(t_{k-1}, y_{k-1}) + 8f(t_k, y_k) + 5f(t_{k+1}, y_{k-1}))$$

Es un método de orden $O(h^3)$, y necesitara de otro método para inicializar la solución en los primeros nodos.

La expresión de Adams Moulton de tres pasos, denotado por AM, tiene como expresión:

$$y_{k+1} = y_k + \frac{h}{24} (-f(t_{k-2}, y_{k-2}) - 5f(t_{k-1}, y_{k-1}) + 19f(t_k, y_k) + 9f(t_{k+1}, y_{k+1}))$$

Se trata de un método de $O(h^4)$ y al igual que los otros métodos de Adams Moulton, necesitaremos inicializar la solución en los primeros nodos con métodos distintos.

3.2.1 Algoritmo de Adams-Moulton AM3

Para la construcción del algoritmo de AM3 consideramos

- Obtención de la variable independiente discretizada.
- Inicialización del vector solución
- Para $k = 1:N$
 - Valor de $k1 = f(t(k), y(k))$
 - Valor de $k2 = f(t(k)+h/2, y(k)+h/2*k1)$
 - Valor de $k3 = f(t(k)+h/2, y(k)+h/2*k2)$
 - Valor de $y(k+1) = y(k) + (k1+2*k2+2*k3+k4)/6$
- Fin para k
- Para $k=2:N$
 - Método de newton
- Prepara datos de salida

De esta manera construimos el código en *Matlab* para Adams Moulton de orden 3 para ecuaciones.

```
function [x,y]=AM3_Ecu(fun,b,N,y0)
h = (b-a)/N;
x = a:h:b;
x=x(:);
y=zeros(N+1,1);
y(1) = y0;
for k = 1:2
    ff(k) = feval(fun,x(k),y(k));
    k1 = ff(k);
    k2 = feval(fun,x(k)+h/2,y(k)+h*k1/2);
    k3 = feval(fun,x(k)+h/2,y(k)+h*k2/2);
    k4 = feval(fun,x(k+1),y(k)+h*k3);
    y(k+1) = y(k)+h*(k1+2*k2+2*k3+k4)/6;
end
for k = 3:N % estimacion por Newton de y(k+1)
    ex = 1; iter = 0; tol = 1e-6; maxiter = 10;
    y1 = y(k); %estimación inicial
    fk = feval(fun,x(k),y(k));
    fkm1 = feval(fun,x(k-1),y(k-1));
    ffun = feval(fun,x(k+1),y1);
    dffun = feval(dfun,x(k+1),y1);
    fx=y1-y(k)-h/12*(8*fk-fkm1+5*ffun);%tres paso orden 3
    efx = norm(fx);
    while iter<maxiter && efx > tol && ex>tol
        dfx = 1-h/24*9*dffun;
        d = fx/dfx;
        t = y1 -d;
        ffun = feval(fun,x(k+1),t);
        dffun = feval(dfun,x(k+1),t);
        ft = t-y(k)-h/12*(8*fk-fkm1+5*ffun);%tres paso orden 3
        efx = norm(ft); ex = norm(t-y1);
        iter = iter+1;
        y1 = t; fx = ft;
    end
    y(k+1) = y1;
end
```

3.2.2 Algoritmo de Adams-Moulton AM4

Para la construcción del algoritmo de AM4 consideramos:

- Obtención de la variable independiente discretizada.
- Inicialización del vector solución.
- Para $k = 1:N$
 - Valor de $k1 = f(t(k), y(k))$
 - Valor de $k2 = f(t(k)+h/2, y(k)+h/2*k1)$
 - Valor de $k3 = f(t(k)+h/2, y(k)+h/2*k2)$
 - Valor de $k4 = f(t(k)+h/2, y(k)+h*k3)$
 - Valor de $y(k+1) = y(k)+(k1+2*k2+2*k3+k4)/6$
- Fin para k
- Para $k = 2:N$
 - Método de newton
- Prepara datos de salida

De esta manera construimos el código en *Matlab* para Adams Moulton de orden 4 para ecuaciones.

```
function [x,y]=AM4_Ecu(fun,a,b,N,y0)
h = (b-a)/N;
x = a:h:b;
x=x(:);
y=zeros(N+1,1);
y(1) = y0;
for k = 1:2
    ff(k) = feval(fun,x(k),y(k));
    k1 = ff(k);
    k2 = feval(fun,x(k)+h/2,y(k)+h*k1/2);
    k3 = feval(fun,x(k)+h/2,y(k)+h*k2/2);
    k4 = feval(fun,x(k+1),y(k)+h*k3);
    y(k+1) = y(k)+h*(k1+2*k2+2*k3+k4)/6;
end
```

```

for k = 3:N % estimación por Newton de y(k+1)
    ex = 1; iter = 0; tol = 1e-6; maxiter = 10;
    y1 = y(k); %estimación inicial
    fk = feval(fun,x(k),y(k));
    fkm1 = feval(fun,x(k-1),y(k-1));
    fkm2 = feval(fun,x(k-2),y(k-2));
    [ffun,dffun]= feval(fun,x(k+1),y1);
    %dffun = feval(dfun,x(k+1),y1);
    fx=y1-y(k)-h/24*(19*fk-5*fkm1+fkm2+9*ffun);%tres paso orden 4
    efx = norm(fx);
    while iter<maxiter && efx > tol && ex>tol
        dfx = 1-h/24*9*dffun;
        d = fx/dfx;
        t = y1 -d;
        [ffun,dffun] = feval(fun,x(k+1),t);
        %dffun = feval(dfun,x(k+1),t);
        ft = t-y(k)-h/24*(19*fk-5*fkm1+fkm2+9*ffun);
        efx = norm(ft); ex = norm(t-y1);
        iter = iter+1;
        y1 = t; fx = ft;
    end
    y(k+1) = y1;
end

```

3.2.3 Algoritmo de Adams-Moulton AM4 para Sistemas de Ecuaciones

Para la construcción del algoritmo de AM4 consideramos

- Obtención de la variable independiente discretizada.
- Inicialización del vector solución
- Para $k = 1:N$

$$\text{Valor de } k1 = f(t(k), y(k))$$

$$\text{Valor de } k2 = f(t(k)+h/2, y(k)+h/2*k1)$$

$$\text{Valor de } k3 = f(t(k)+h/2, y(k)+h/2*k2)$$

$$\text{Valor de } k4 = f(t(k)+h/2, y(k)+h*k3)$$

$$\text{Valor de } y(k+1) = y(k)+k1+2*k2+2*k3+k4 / 6$$

- Fin para k
- Para $k = 2:N$
Método de newton
- Prepara datos de salida

De esta manera construimos el código en Matlab para Adams Moulton de orden 4 para ecuaciones.

```
function [t,y]=AM4_Sis(f,a,b,y0,N)
h=(b-a)/N;    %tamaño de paso
t=a:h:b;
t=t(:);
y=zeros(N+1,length(y0)); %reserva de memoria
y(1,:)=y0;
for k=1:2    %3 pasos generados con RK4
    k1=h*feval(f,t(k),y(k,:));
    k2=h*feval(f,t(k)+h/2,y(k,:)+k1/2);
    k3=h*feval(f,t(k)+h/2,y(k,:)+k2/2);
    k4=h*feval(f,t(k)+h,y(k,:)+k3);
    y(k+1,:)=y(k,:)+(k1+2*k2+2*k3+k4)/6;
end
for k=3:N    %pasos generados con ecuación para AM4 corrector
    dif = 1; iter = 0; tol = 1e-3; maxiter = 10;
    w0 = y(k,:); % estimación inicial
    k1 = feval(f,t(k),w0);
    fkm1 = feval(f,t(k-1),y(k-1,:));
    fkm2 = feval(f,t(k-2),y(k-2,:));
    [fw0,dfw0] = feval(f,t(k+1),w0);
    fx = w0-y(k,:)-h/24*(fkm2-5*fkm1+19*k1+9*fw0);
    efx = norm(fx);
```

```

while iter < maxiter && dif > tol && efx > tol
    dfx= 1-h/24*9*dfw0;
    d = dfx\fx;
    w = w0-d;
    [fw0,dfw0] = feval(f,t(k+1),w);
    ft = w-y(k,:)'-h/24*(fkm2-5*fkm1+19*k1+9*fw0);
    dif = norm(w-w0); iter = iter+1; w0 = w; fx = ft; efx = norm(ft);
end
y(k+1,:) = w0;
end
iter
end

```

3.3 PROBLEMAS PVI CON ADAMS-MOULTON

Problema 1

Sea el siguiente problema de valor inicial $y'(x) = -\frac{y}{3} + \frac{e^x}{3y^3}$, $x \in [0, 5]$

Con las condiciones iniciales $y(0) = -1$

a) Escriba la función que describa la ecuación diferencial.

```

function [f,df] = Problema1(x,y)
    f = -y/3+exp(x)/(3*y.^3);
    df = -1/3-exp(x)./y.^4;    %derivado de la función
end

```

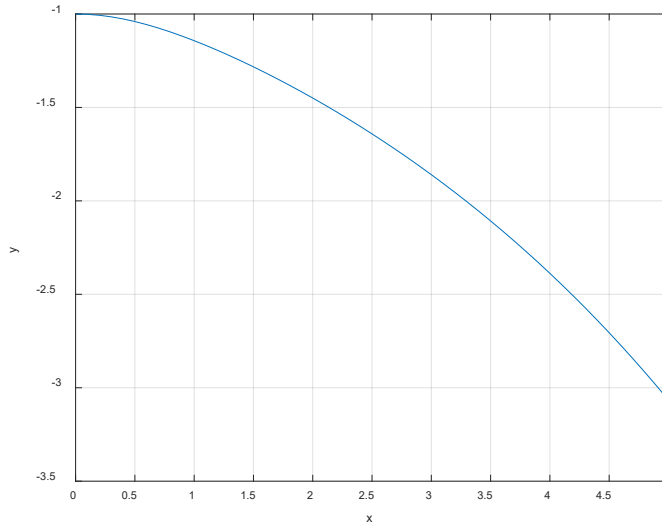
b) Resuelva el PVI con y representa

```

>> [x,y]=AM2_Ecu('Problema1',0,5,50,-1);
>> plot(x,y),grid on,xlabel('x'),ylabel('y')

```

Figura 3.1: Representación de la solución del “Problema 1” con AM2



Fuente: Autores

c) Indique los valores para $y(x)$ para $x \in \{0,1,4.5,5\}$

$b - a$ $N+1$
Posicion - a x

<p>• 0</p> $\begin{matrix} 5 & 51 \\ 0 & x \end{matrix} = 1$	<p>• 1</p> $\begin{matrix} 5 & 51 \\ 1 & x \end{matrix} = 10.2 \rightarrow 11$	<p>• 4.5</p> $\begin{matrix} 5 & 51 \\ 4.5 & x \end{matrix} = 45.9 \rightarrow 46$
<p>• 5</p> $\begin{matrix} 5 & 51 \\ 5 & x \end{matrix} = 51$		

Ingresamos las posiciones en Matlab

```
>> X = [x(1) x(11) x(46) x(51) ]
X =
    0  1.0000  4.5000  5.0000
>> Y = [y(1) y(11) y(46) y(51) ]
Y =
-1.0000 -1.1427 -2.7056 -3.0659
```

x	0	1	4.5	5
y(t)	-1.0000	-1.1427	-2.7056	-3.0659

d) Indique una estimación del orden de convergencia

```
>> [x,y1]=AM2_Ecu('Problema1',0,5,50*1,-1);sol1=y1(:,1);
>> [x,y2]=AM2_Ecu('Problema1',0,5,50*2,-1);sol2=y2(:,1);
>> [x,y3]=AM2_Ecu('Problema1',0,5,50*4,-1);sol3=y3(:,1);
>> [x,y4]=AM2_Ecu('Problema1',0,5,50*8,-1);sol4=y4(:,1);
>> [x,y5]=AM2_Ecu('Problema1',0,5,50*16,-1);sol5=y5(:,1);
>> [x,y6]=AM2_Ecu('Problema1',0,5,50*32,-1);sol6=y6(:,1);
>> [x,y7]=AM2_Ecu('Problema1',0,5,50*64,-1);sol7=y7(:,1);
>> e1=abs(sol1-sol2(1:2:end)); e2=abs(sol2-sol3(1:2:end));
>> e3=abs(sol3-sol4(1:2:end)); e4=abs(sol4-sol5(1:2:end));
>> e5=abs(sol5-sol6(1:2:end)); e6=abs(sol6-sol7(1:2:end));
>> relacion=[max(e1)/max(e2) max(e2)/max(e3) max(e3)/max(e4) max(e4)/
max(e5) max(e5)/max(e6) ]'
relacion =
    1.8816
    1.9390
    1.9691
    1.9844
    1.9922
```

Problema 2

Encuentre la solución del problema de valor inicial $y'(t) = -(1)/(1+y^2)$, $y(0) = 1$ para $t = 1$ y $t = 2$ con $h = 0.5$

a) Escriba la función que describa la ecuación diferencial.

Procedemos a encontrar la derivada de la ecuación

```
>> f= @(y) (-1./(1+y.^2));
>> syms y
>> diff(f,y)
ans =
(2*y)/(y^2 + 1)^2
```

Una vez encontrada la derivada de la ecuación escribimos la función

```
function [f,df] = Problema2(t,y)
    f = -1./(1+y.^2);
    df = (2*y)/(y^2 + 1)^2;
end
```

b) Resolvemos el PVI y graficamos la solución

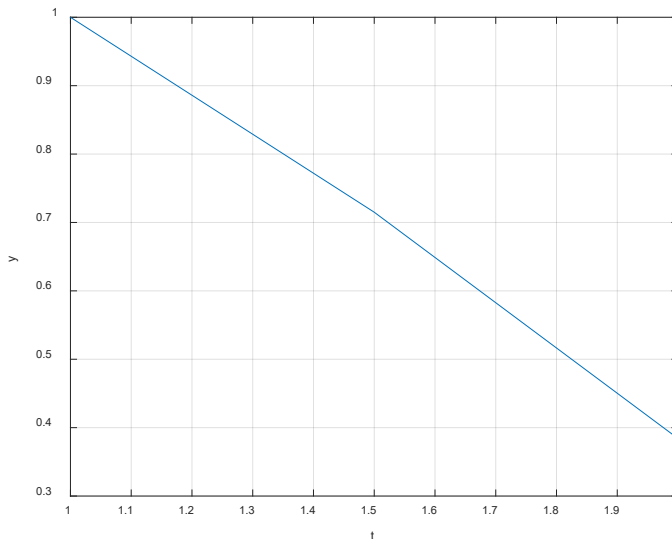
Calculamos el valor de N . Partiendo de $h = \frac{b-a}{N}$ y despejando se obtiene $N = \frac{b-a}{h}$

Donde $N = (2-1)/0.5$ obteniendo el número de iteraciones $N = 2$

Llamamos al método para graficar la solución

```
>> [x,y]=AM2_Ecu('Problema2',1,2,2,1);
>> plot(x,y),grid on,xlabel('t'),ylabel('y')
```

Figura 3.2: Representación de la solución del “Problema 2” con AM2



Fuente: Autores

c) Indique una estimación del orden de convergencia

```
>> [x,y]=AM2_Ecu('Problema2',1,2,2,1);
>> plot(x,y),grid on,xlabel('t'),ylabel('y')
>> [x,y1]=AM2_Ecu('Problema2',1,2,2*1,1);sol1=y1(:,1);
>> [x,y2]=AM2_Ecu('Problema2',1,2,2*2,1);sol2=y2(:,1);
>> [x,y3]=AM2_Ecu('Problema2',1,2,2*4,1);sol3=y3(:,1);
```

```
>> [x,y4]=AM2_Ecu('Problema2',1,2,2*8,1);sol4=y4(:,1);
>> [x,y5]=AM2_Ecu('Problema2',1,2,2*16,1);sol5=y5(:,1);
>> [x,y6]=AM2_Ecu('Problema2',1,2,2*32,1);sol6=y6(:,1);
>> [x,y7]=AM2_Ecu('Problema2',1,2,2*64,1);sol7=y7(:,1);
>> e1=abs(sol1-sol2(1:2:end)); e2=abs(sol2-sol3(1:2:end));
>> e3=abs(sol3-sol4(1:2:end)); e4=abs(sol4-sol5(1:2:end));
>> e5=abs(sol5-sol6(1:2:end)); e6=abs(sol6-sol7(1:2:end));
>> relacion=[max(e1)/max(e2) max(e2)/max(e3) max(e3)/max(e4) max(e4)/
max(e5) max(e5)/max(e6) ]'
relacion =
    0.7686
    1.4632
    1.7454
    1.8758
    1.9387
```

Problema 3

Dado que $\frac{dy}{dt} = 30(\cos t - y) + 3 \sin t$ si $y(0) = 1$ emplea el método de AM2 para obtener una solución de $t = 0$ a 4 con el tamaño de paso de 0.4

Solución

$$\frac{dy}{dt} = 30(\cos t - y) + 3 \sin t$$

Primero encontramos la primera derivada de la ecuación con *Matlab*

```
>> f= @(t) (30.*(cos(t)-y)+3.*sin(t));
>> syms t
>> diff(f,t)
ans =
    3*cos(t) - 30*sin(t)
```

Procedemos a escribir la función

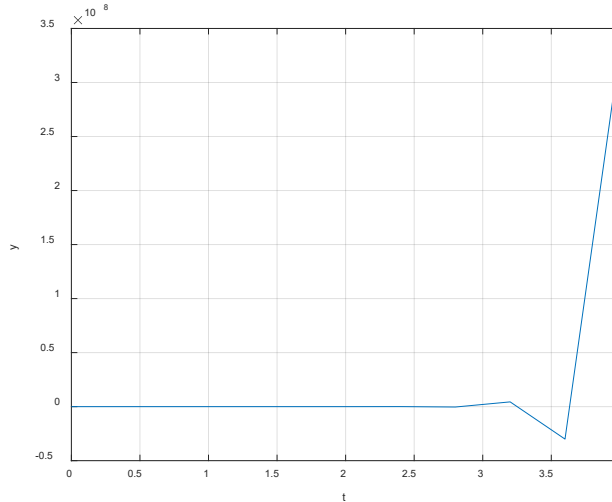
```
function [f,df] = Problema3(t,y)
    f = 30*(cos(t)-y)+3*sin(t);
    df = - 30;
end
```

Calculamos el valor de N . Partiendo de $h = \frac{b-a}{N}$ y despejando se obtiene $N = \frac{b-a}{h}$

Donde $N = (4-0)/0.4$ obteniendo el número de iteraciones $N = 10$

```
>> [x,y]=AM2_Ecu('Problema3',0,4,10,1);
>> plot(x,y),grid on,xlabel('t'),ylabel('y')
```

Figura 3.3: Representación de la solución del “Problema 3” con AM2



Fuente: Autores

Problema 4

Resuelva el problema que sigue de valor inicial de $x = 0$ a $x = 0.75$;

$$\frac{dy}{dx} = yx^2 - y$$

Con tamaño de pasos de $h = 0.25$ si $y(0) = 1$ emplea AM2 para encontrar la solución.

Solución

$$\frac{dy}{dx} = yx^2 - y$$

Encontramos la derivada ecuación diferencial debido al método a utilizar

```
>> syms y x
>> f=(y*x^2)-y;
>> diff(f,y)
ans =
x^2 - 1
```

Creamos la función en *Matlab*

```
function [f,df] = Problema4(x,y)
    f = (y*x^2)-y;
    df = x^2 - 1;
end
```

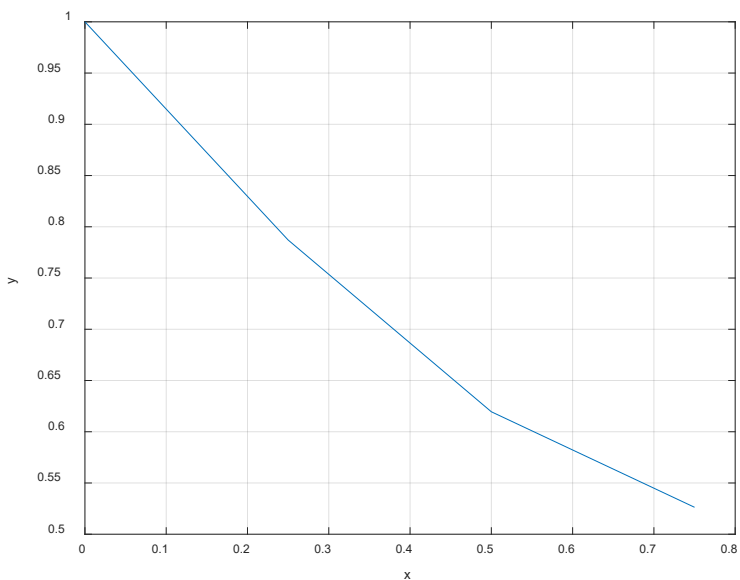
Calculamos el valor de N . Partiendo de $h = \frac{b-a}{N}$ y despejando se obtiene $N = \frac{b-a}{h}$

Donde $N = (0.75-0)/0.25$ obteniendo el número de iteraciones $N = 3$

Procedemos a llamar al método para graficar la solución

```
>> [x,y]=AM2_Ecu('Problema4',0,0.75,3,1);
>> plot(x,y),grid on,xlabel('x'),ylabel('y')
```

Figura 3.4: Representación de la solución del “Problema 04” con AM2



Fuente: Autores

Problema 5

Sea el siguiente problema de valor inicial: $y'(x) = (1-2x)y$, $x \in [0, 3]$ con las condiciones iniciales $y(0) = 1$,

a) Escriba la función de la ecuación diferencial de primer orden

Antes de proceder a escribir la función encontramos la derivada W de la función debido al método a utilizar:

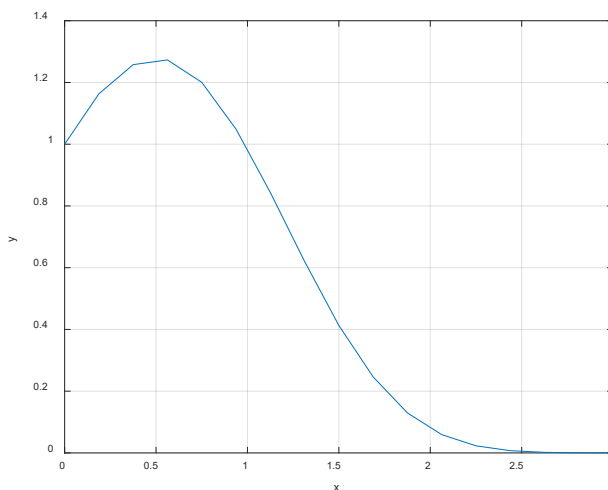
```
>> syms y x
>> f=(1-2*x)*y;
>> diff(f,y)
ans =
1 - 2*x
```

```
function [f,df] = Problema5(x,y)
    f = (1-2*x)*y;
    df = 1 - 2*x ;
end
```

b) Represente $y(x)$ con 16 subintervalos.

```
>> [x,y]=AM2_Ecu('Problema5',0,3,16,1);
>> plot(x,y),grid on,xlabel('x'),ylabel('y')
```

Figura 3.5: Representación de la solución del “Problema 5” con AM2



Fuente: Autores

c) Indique los valores de $y(x)$ para $x \in \{0, 0.75, 2.25, 3\}$

Encontramos las posiciones

		$b - a$	$N+1$
		Posición - a x	
• 0	3	17	$= 1$
0	x		
• 0.75	3	17	$= 4.25 \rightarrow 5$
0.75	x		
• 2.25	3	17	$= 12.75 \rightarrow 13$
2.25	x		
• 3	3	17	$= 17$
3	x		

```
>> [x,y]=AM2_Ecu('Problema5',0,3,16,1);
>> plot(x,y),grid on,xlabel('x'),ylabel('y')
>> X = [x(1) x(5) x(13) x(17)]
X =
    0    0.7500    2.2500    3.0000
>> Y = [y(1) y(5) y(13) y(17)]
Y =
    1.0000    1.2004    0.0230    0.0000
```

Valores de las posiciones solicitadas

x	0	0.75	2.25	3
$y(x)$	1.0000	1.2004	0.0230	0.0000

Problema 6

Sea el siguiente problema de valor inicial $y''(x) = -y - \sin(x)$, $x \in [0, 2\pi]$ con las condiciones iniciales $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$

a) Escriba la función que describa la ecuación diferencial

Pasamos de una ecuación de segunda orden a un sistema de ecuaciones de primer orden

$$\begin{aligned} y &= z_1 \\ y' &= z_1' = z_2 \end{aligned}$$

$$y'' = z'_1 = z'_2$$

$$y''(x) = -y - \sin(x) \rightarrow z'_2 = -z_1 - \sin(x)$$

Obteniendo el siguiente sistema

$$z'_1 = z_2$$

$$z'_2 = -z_1 - \sin(x)$$

$$F(x) = \begin{bmatrix} z_2 \\ -z_1 - \sin(x) \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

Ahora encontramos la matriz Jacobiana

$$F(x) = \begin{bmatrix} z_2 \\ -z_1 - \sin(x) \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

Ahora procedemos a escribir la función en *Matlab*

```
function [f,df] = Problema6(x,z)
    f = [z(2);-z(1)-2*sin(x)];
    df = [0 1;-1 0]; %matriz jacobiana
end
```

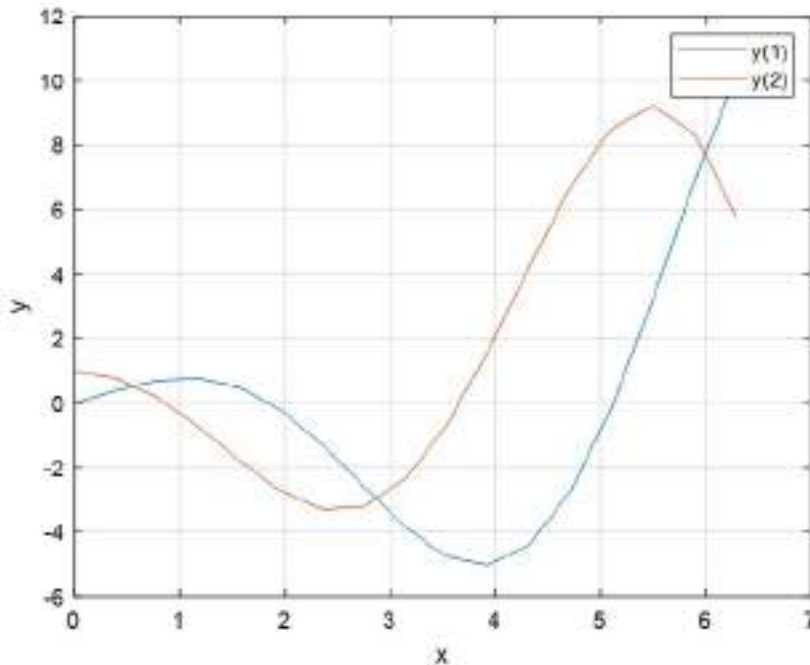
b) Resuelva el PVI con

Calculamos el valor de N . Partiendo de $h = \frac{b-a}{N}$ y despejando se obtiene $N = \frac{b-a}{h}$

Donde $N = (2\pi-0) / (\pi/8)$ obteniendo el número de iteraciones $N = 16$

```
>> [t,y]=AM2_Sist('Problema6',0,2*pi,16,[0 1]);
>> plot(t,y),grid on,xlabel('x'),ylabel('y')
>> legend('y(1)', 'y(2)')
```

Figura 3.6: Representación de la solución del “Problema 6” con AM2



Fuente: Autores

c) Indique una estimación del orden de convergencia:

```
>> [t,y1]=AM2_Sist('Problema6',0,2*pi,16*1,[0 1]);sol1=y1(:,1);
>> [t,y2]=AM2_Sist('Problema6',0,2*pi,16*2,[0 1]);sol2=y2(:,1);
>> [t,y3]=AM2_Sist('Problema6',0,2*pi,16*4,[0 1]);sol3=y3(:,1);
>> [t,y4]=AM2_Sist('Problema6',0,2*pi,16*8,[0 1]);sol4=y4(:,1);
>> [t,y5]=AM2_Sist('Problema6',0,2*pi,16*16,[0 1]);sol5=y5(:,1);
>> [t,y6]=AM2_Sist('Problema6',0,2*pi,16*32,[0 1]);sol6=y6(:,1);
>> [t,y7]=AM2_Sist('Problema6',0,2*pi,16*64,[0 1]);sol7=y7(:,1);
>> e1=abs(sol1-sol2(1:2:end)); e2=abs(sol2-sol3(1:2:end));
>> e3=abs(sol3-sol4(1:2:end)); e4=abs(sol4-sol5(1:2:end));
>> e5=abs(sol5-sol6(1:2:end)); e6=abs(sol6-sol7(1:2:end));
>> relacion=[max(e1)/max(e2) max(e2)/max(e3) max(e3)/max(e4) max(e4)/
max(e5) max(e5)/max(e6) ]'
```

relacion =
 1.6406
 2.0554
 2.0687
 2.0423
 2.0229

Problema 7

Dado el siguiente sistema de ecuaciones:

$$y'_1 = 2y_1(t) + 2y_2(t)$$

$$y'_2 = 3y_1(t) + y_2(t)$$

Con las condiciones iniciales $y_1(0) = -1$, $y_2(0) = 4$ con $t \in [0,1]$

a) Escriba la función que describa la ecuación diferencial

Procedemos a encontrar la matriz jacobiana para poder utilizar el método

$$F(t) = \begin{bmatrix} 2y_1(t) + 2y_2(t) \\ 3y_1(t) + y_2(t) \end{bmatrix} \rightarrow \frac{\partial F}{\partial y} = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$$

Creamos la función en *Matlab*

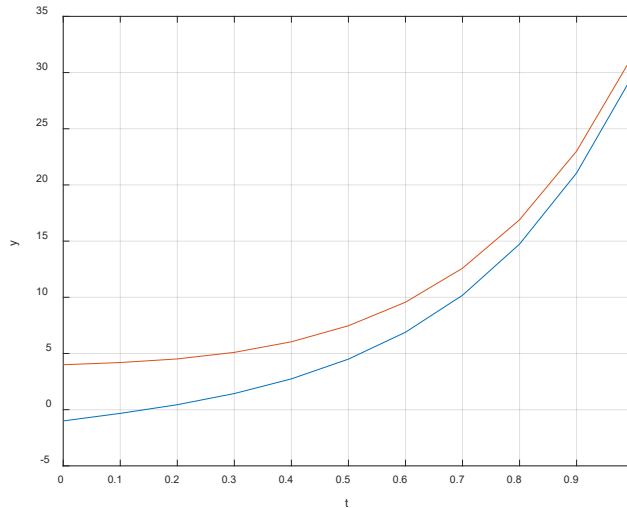
```
function [f,df] = Problema7(t,y)
    f = [2*y(1)+2*y(2);3*y(1)+y(2)];
    df = [2 2;3 1]; %matriz jacobiana
end
```

b) Resuelva el PVI con

Procedemos a llamar al método para encontrar la solución

```
>> [t,y]=AM2_Sis('Problema7',0,1,10,[-1 4]);
>> plot(t,y),grid on,xlabel('t'),ylabel('y')
```

Figura 3.7: Representación de la solución del “Problema 7” con AM2 para sistemas de ecuaciones



Fuente: Autores

Problema 8

Dado el siguiente sistema de ecuaciones:

$$u'_1 = 3u_1(t) + 2u_2(t) - (2t^2+1)e^{2t}$$

$$u'_2 = 4u_1(t) + u_2(t) + (t^2+2t-4)e^{3t}$$

Con las condiciones iniciales $u_1(0) = 1$, $u_2(0) = 1$ con $t \in [0,1]$

a) Escriba la función que describa la ecuación diferencial

Procedemos a encontrar la matriz jacobiana para poder utilizar el método

$$F(t) = \begin{bmatrix} 3u_1(t) + 2u_2(t) - (2t^2 + 1)e^{2t} \\ 4u_1(t) + u_2(t) + (t^2 + 2t - 4)e^{3t} \end{bmatrix} \rightarrow \frac{\partial F}{\partial u} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$$

Creamos la función en *Matlab*

```
function [f,df] = Problema8(t,u)
    f = [3.*u(1)+2.*u(2)-(2.*t.^2+1)*exp(2*t);4.*u(1)+u(2)+(t.^2+2.*t-4).
        *exp(3.*t)];
    df = [3 2;4 1]; %matriz jacobiana
end
```

b) Resuelva el PVI con

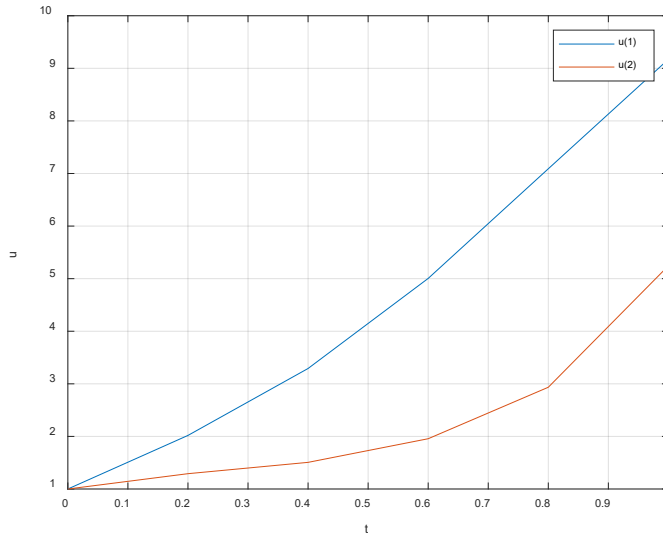
Calculamos el valor de N . Partiendo de $h = \frac{b-a}{N}$ y despejando se obtiene $N = \frac{b-a}{h}$

Donde $N = (1-0)/0.2$ obteniendo el número de iteraciones $N = 5$

Procedemos a llamar al método para encontrar la solución del ejercicio

```
>> [t,y]=AM2_Sist('Problema8',0,1,5,[1 1]);
>> plot(t,y)
>> grid on,xlabel('t'),ylabel('u')
```

Figura 3.8: Representación de la solución del “Problema 8” con AM2 para sistemas de ecuaciones



Fuente: Autores

c) Indique una estimación del orden de convergencia

```
>> [x,y1]=AM2_Sist('Problema8',0,1,5*1,[1 1]);sol1=y1(:,1);
>> [x,y2]=AM2_Sist('Problema8',0,1,5*2,[1 1]);sol2=y2(:,1);
>> [x,y3]=AM2_Sist('Problema8',0,1,5*4,[1 1]);sol3=y3(:,1);
>> [x,y4]=AM2_Sist('Problema8',0,1,5*8,[1 1]);sol4=y4(:,1);
>> [x,y5]=AM2_Sist('Problema8',0,1,5*16,[1 1]);sol5=y5(:,1);
>> [x,y6]=AM2_Sist('Problema8',0,1,5*32,[1 1]);sol6=y6(:,1);
>> [x,y7]=AM2_Sist('Problema8',0,1,5*64,[1 1]);sol7=y7(:,1);
>> e1=abs(sol1-sol2(1:2:end)); e2=abs(sol2-sol3(1:2:end));
```

```
>> e3=abs(sol3-sol4(1:2:end)); e4=abs(sol4-sol5(1:2:end));
>> e5=abs(sol5-sol6(1:2:end)); e6=abs(sol6-sol7(1:2:end));
>> relacion=[max(e1)/max(e2) max(e2)/max(e3) max(e3)/max(e4) max(e4)/
max(e5) max(e5)/max(e6) ]'
relacion =
    0.7448
    1.0531
    1.3759
    1.6312
    1.7976
```

Como podemos observar la estimación del orden de convergencia no llega a 2

Problema 9

Dado el siguiente sistema de ecuaciones:

$$u'_1 = -4u_1 - 2u_2 + \cos(t) + 4\sin(t)$$

$$u'_2 = 3u_1 + u_2 - 3\sin(t)$$

Con las condiciones iniciales $u_1(0) = 0$, $u_2(0) = -1$ con $t \in [0, 2]$

a) Escriba la función que describa la ecuación diferencial

Procedemos a encontrar la matriz jacobiana para poder utilizar el método

$$F(t) = \begin{bmatrix} -4u_1 - 2u_2 + \cos(t) + 4\sin(t) \\ 3u_1 + u_2 - 3\sin(t) \end{bmatrix} \rightarrow \frac{\partial F}{\partial u} = \begin{bmatrix} -4 & -2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$$

Escribimos la función en *Matlab*

```
function [f,df] = Problema9(t,u)
f=[-4.*u(1)-2.*u(2)+cos(t)+4.*sin(t);3.*u(1)+u(2)-3.*sin(t)];
df=[-4 -2;3 1]; %matriz jacobiana
end
```

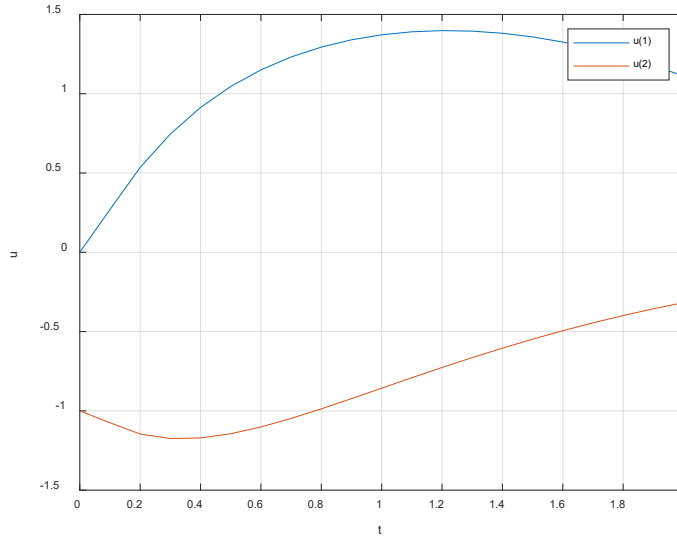
b) Resuelva el PVI con $h = 0.1$

Calculamos el valor de N . Partiendo de $h = \frac{b-a}{N}$ y despejando se obtiene $N = \frac{b-a}{h}$

Donde $N = (2-0)/0.1$ obteniendo el número de iteraciones $N = 20$

Procedemos a llamar al método para encontrar la solución del ejercicio de sistemas de ecuaciones diferenciales.

Figura 3.9: Representación de la solución del “Problema 9” con AM2 para sistemas de ecuaciones



Fuente: Autores

c) Indique una estimación del orden de convergencia

```
>> [t,y]=AM2_Sist('Problema9',0,2,20,[0 -1]);
>> plot(t,y),grid on,xlabel('t'),ylabel('u')
>> legend('u(1)', 'u(2)')
>> [t,y1]=AM2_Sist('Problema9',0,2,20*1,[0 -1]);sol1=y1(:,1);
>> [t,y2]=AM2_Sist('Problema9',0,2,20*2,[0 -1]);sol2=y2(:,1);
>> [t,y3]=AM2_Sist('Problema9',0,2,20*4,[0 -1]);sol3=y3(:,1);
>> [t,y4]=AM2_Sist('Problema9',0,2,20*8,[0 -1]);sol4=y4(:,1);
>> [t,y5]=AM2_Sist('Problema9',0,2,20*16,[0 -1]);sol5=y5(:,1);
>> [t,y6]=AM2_Sist('Problema9',0,2,20*32,[0 -1]);sol6=y6(:,1);
>> [t,y7]=AM2_Sist('Problema9',0,2,20*64,[0 -1]);sol7=y7(:,1);
>> e1=abs(sol1-sol2(1:2:end)); e2=abs(sol2-sol3(1:2:end));
>> e3=abs(sol3-sol4(1:2:end)); e4=abs(sol4-sol5(1:2:end));
>> e5=abs(sol5-sol6(1:2:end)); e6=abs(sol6-sol7(1:2:end));
>> relacion=[max(e1)/max(e2) max(e2)/max(e3) max(e3)/max(e4) max(e4)/
max(e5) max(e5)/max(e6) ]'
```

relacion =
 1.9291
 1.9606
 1.9795
 1.9895
 1.9948

Como podemos observar casi alcanzamos al orden de convergencia Oh2 llegando a la solución exacta.

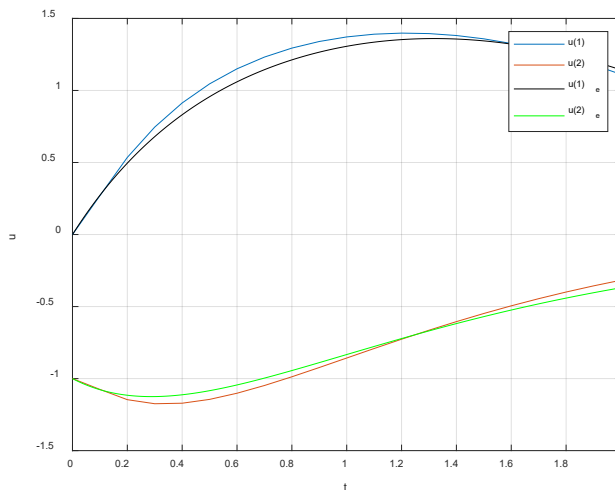
- d) Compara gráficamente la solución exacta con las aproximaciones encontradas con el método AM2

$$u_1(t) = 2e^{-t} - 2e^{-2t} + \sin(t)$$

$$u_2(t) = -3e^{-t} + 2e^{-2t}$$

```
>> [t,y]=AM2_Sist('Problema9',0,2,20,[0 -1]);
>> plot(t,y),grid on,xlabel('t'),ylabel('u')
>> u1exacta=2*exp(-t)-2*exp(-2*t)+sin(t);
>> u2exacta=-3*exp(-t)+2*exp(-2*t);
>> hold on
>> plot(t,u1exacta,'black')
>> plot(t,u2exacta,'green')
>> legend('u(1)', 'u(2)', 'u(1)_e', 'u(2)_e')
```

Figura 3.10: Representación de la solución aproximada vs la solución exacta



Fuente: Autores

Problema 10

Dado el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} u'_1 &= u_2 \\ u'_2 &= -u_1 - 2e^t + 1 \\ u'_3 &= -u_1 - e^t + 1 \end{aligned}$$

Con las condiciones iniciales $u_1(0) = 1$, $u_2(0) = 0$, $u_3(0) = 1$, con $t \in [0,2]$

a) Escriba la función que describa la ecuación diferencial

$$F(t) = \begin{bmatrix} u_2 \\ -u_1 - 2e^t + 1 \\ -u_1 - e^t + 1 \end{bmatrix} \rightarrow \frac{\partial F}{\partial u} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Una vez encontrada la matriz jacobiana escribimos la función en *Matlab*

```
function [f,df] = Problema10(t,u)
    f=[u(2);-u(1)-2*exp(t)+1;-u(1)-exp(t)+1];
    df=[0 1 0;-1 0 0;-1 0 0]; %matriz jacobiana
end
```

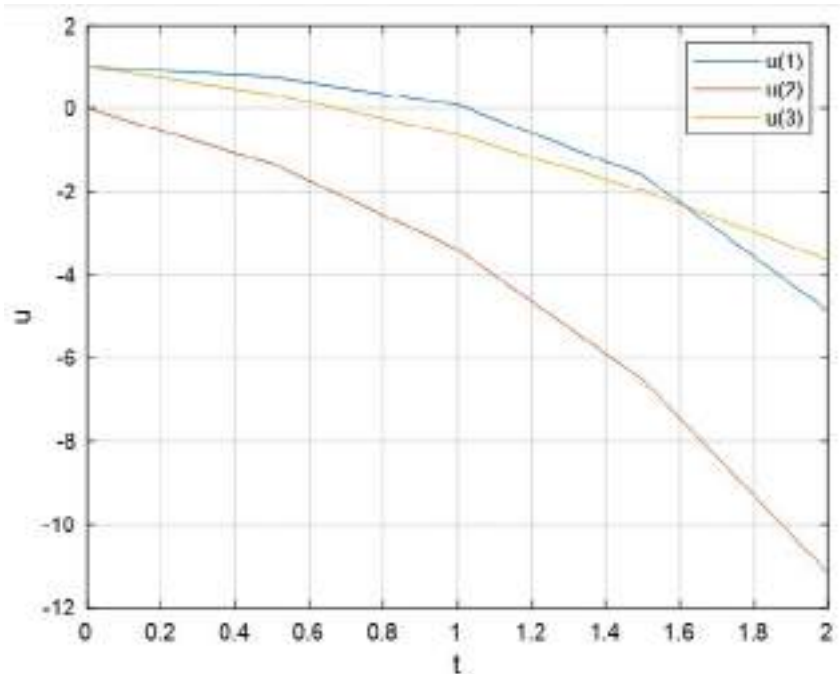
b) Resuelva el PVI con $h = 0.5$

Calculamos el valor de N . Partiendo de $h = \frac{b-a}{N}$ y despejando se obtiene $N = \frac{b-a}{h}$

Donde $N = (2-0)/0.5$ obteniendo el número de iteraciones $N = 4$

```
>> [t,y]=AM2_Sist('Problema10',0,2,4,[1 0 1]);
>> plot(t,y),grid on,xlabel('t'),ylabel('u')
>> legend('u(1)', 'u(2)', 'u(3)')
```

Figura 3.11: Representación de la solución del “Problema 10” con AM2 para sistemas de ecuaciones



Fuente: Autores

c) Indique una estimación del orden de convergencia

```
>> [t,y1]=AM2_Sist('Problema10',0,2,4*1,[1 0 1]);sol1=y1(:,1);
>> [t,y2]=AM2_Sist('Problema10',0,2,4*2,[1 0 1]);sol2=y2(:,1);
>> [t,y3]=AM2_Sist('Problema10',0,2,4*4,[1 0 1]);sol3=y3(:,1);
>> [t,y4]=AM2_Sist('Problema10',0,2,4*8,[1 0 1]);sol4=y4(:,1);
>> [t,y5]=AM2_Sist('Problema10',0,2,4*16,[1 0 1]);sol5=y5(:,1);
>> [t,y6]=AM2_Sist('Problema10',0,2,4*32,[1 0 1]);sol6=y6(:,1);
>> [t,y7]=AM2_Sist('Problema10',0,2,4*64,[1 0 1]);sol7=y7(:,1);
>> e1=abs(sol1-sol2(1:2:end)); e2=abs(sol2-sol3(1:2:end));
>> e3=abs(sol3-sol4(1:2:end)); e4=abs(sol4-sol5(1:2:end));
>> e5=abs(sol5-sol6(1:2:end)); e6=abs(sol6-sol7(1:2:end));
>> relacion=[max(e1)/max(e2) max(e2)/max(e3) max(e3)/max(e4) max(e4)/
max(e5) max(e5)/max(e6) ]'
relacion =
    2.6975
    2.4122
```

2.1914

2.0928

2.0454

Como podemos observar llega al orden de convergencia;

- d) Compara gráficamente la solución exacta con las aproximaciones encontradas con el método AM2

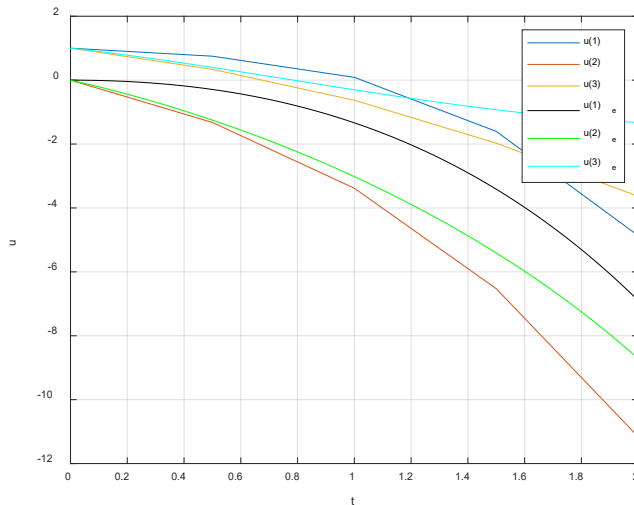
$$u_1(t) = \cos(t) + \sin(t) - e^t$$

$$u_2(t) = -\sin(t) + \cos(t) - e^t$$

$$u_3(t) = -\sin(t) + \cos(t)$$

```
>> [t,y]=AM2_Sist('Problema10',0,2,4,[1 0 1]);
>> plot(t,y),grid on,xlabel('t'),ylabel('u')
>> u1exacta=cos(t)+sin(t)-exp(t);
>> u2exacta=-sin(t)+cos(t)-exp(t);
>> u3exacta=-sin(t)+cos(t);
>> hold on
>> plot(t,u1exacta,'black')
>> plot(t,u2exacta,'green')
>> plot(t,u3exacta,'cyan')
>> legend('u(1)', 'u(2)', 'u(3)', 'u(1)_e', 'u(2)_e', 'u(3)_e')
```

Figura 3.12: Representación de la solución aproximada vs la solución exacta



Fuente: Autores

Problema 11

Dado el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} u'_1 &= u_2 - u_3 + t \\ u'_2 &= 3t^2 \\ u'_3 &= u_2 + e^{-t} \end{aligned}$$

Con las condiciones iniciales $u_1(0) = 1, u_2(0) = 1, u_3(0) = -1$, con $t \in [0,1]$

a) Escriba la función que describa la ecuación diferencial

$$F(t) = \begin{bmatrix} u_2 - u_3 + t \\ 3t^2 \\ u_2 + e^{-t} \end{bmatrix} \rightarrow \frac{\partial F}{\partial u} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Una vez encontrada la matriz jacobiana escribimos la función en *Matlab*

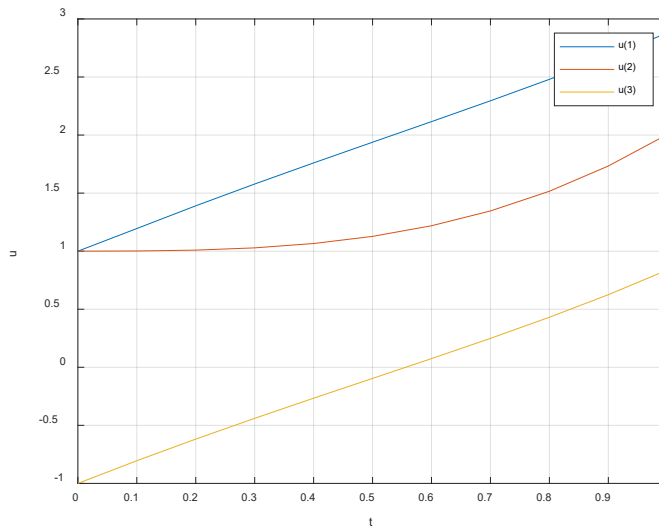
b) Resuelva el PVI con $h = 0.1$

Calculamos el valor de N . Partiendo de $h = \frac{b-a}{N}$ y despejando se obtiene $N = \frac{b-a}{h}$

Donde $N = (1-0)/0.1$ obteniendo el número de iteraciones $N = 10$

```
>> [t,y]=AM2_Sist('Problema11',0,1,10,[1 1 -1]);
>> plot(t,y),grid on,xlabel('t'),ylabel('u')
```

Figura 3.13: Representación de la solución del “Problema 11” con AM2 para sistemas de ecuaciones



Fuente: Autores

c) Indique una estimación del orden de convergencia

```
>> [t,y]=AM2_Sist('Problema11',0,1,10,[1 1 -1]);
>> plot(t,y),grid on,xlabel('t'),ylabel('u')
>> plot(t,y),grid on,xlabel('t'),ylabel('u')
>> legend('u(1)', 'u(2)', 'u(3)')
>> [t,y1]=AM2_Sist('Problema11',0,1,10*1,[1 1 -1]);sol1=y1(:,1);
>> [t,y2]=AM2_Sist('Problema11',0,1,10*2,[1 1 -1]);sol2=y2(:,1);
>> [t,y3]=AM2_Sist('Problema11',0,1,10*4,[1 1 -1]);sol3=y3(:,1);
>> [t,y4]=AM2_Sist('Problema11',0,1,10*8,[1 1 -1]);sol4=y4(:,1);
>> [t,y5]=AM2_Sist('Problema11',0,1,10*16,[1 1 -1]);sol5=y5(:,1);
>> [t,y6]=AM2_Sist('Problema11',0,1,10*32,[1 1 -1]);sol6=y6(:,1);
>> [t,y7]=AM2_Sist('Problema11',0,1,10*64,[1 1 -1]);sol7=y7(:,1);
>> e1=abs(sol1-sol2(1:2:end)); e2=abs(sol2-sol3(1:2:end));
>> e3=abs(sol3-sol4(1:2:end)); e4=abs(sol4-sol5(1:2:end));
>> e5=abs(sol5-sol6(1:2:end)); e6=abs(sol6-sol7(1:2:end));
>> relacion=[max(e1)/max(e2) max(e2)/max(e3) max(e3)/max(e4) max(e4)/
max(e5) max(e5)/max(e6) ]'
relacion =
    1.7164
    1.8648
    1.9339
    1.9673
    1.9837
```

d) Compara gráficamente la solución exacta con las aproximaciones encontradas con el método AM2

$$u_1(t) = -0.05t^5 + 0.25t^4 + t + 2 - e^{-t}$$

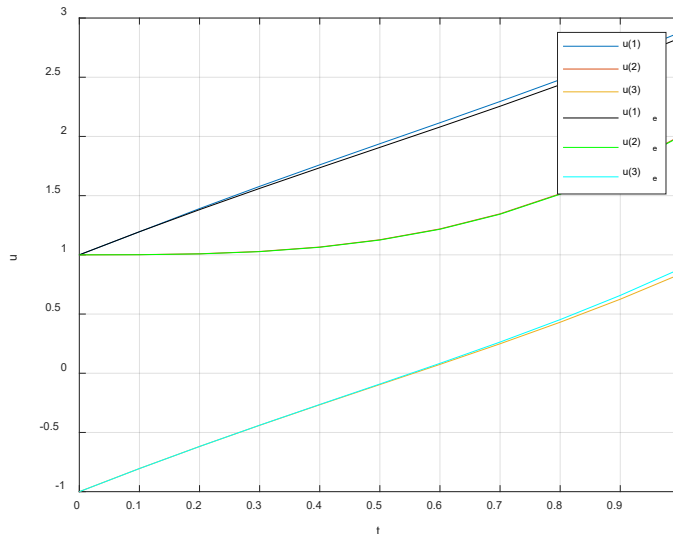
$$u_2(t) = t^3 + 1$$

$$u_3(t) = 0.25t^4 + t - e^{-t}$$

```
>> [t,y]=AM2_Sist('Problema11',0,1,10,[1 1 -1]);
>> plot(t,y),grid on,xlabel('t'),ylabel('u')
>> hold on
>> u1exacta=-0.05.*t.^5+0.25.*t.^4+t+2-exp(-t);
>> u2exacta=t.^3+1;
>> u3exacta=0.25.*t.^4+t-exp(-t);
```

```
>> plot(t,u1exacta,'black')
>> plot(t,u2exacta,'green')
>> plot(t,u3exacta,'cyan')
>> legend('u(1)', 'u(2)', 'u(3)', 'u(1)_e', 'u(2)_e', 'u(3)_e')
```

Figura 3.14: Representación de la solución aproximada vs la solución exacta



Fuente: Autores

Problema 12

La Ley de Newton del enfriamiento establece que la razón de cambio de la temperatura $T(t)$ es proporcional a la diferencia entre la temperatura del medio $M(t)$ y la temperatura del cuerpo. Esto es:

$$\frac{dT}{dt} = K[M(t) - T(t)]$$

Donde K es una constante. Sea $K = 1 \text{ l/min}$ y supóngase que la temperatura del medio es constante $M(t) = 70^\circ$. Si el cuerpo esta inicialmente a 100° , use el método de AM2 con $h = 0.1$ para aproximar la temperatura del cuerpo al cabo de

a) 1 minuto

Solución

$$\frac{dT}{dt} = 1[70 - T(t)]$$

Como sabemos el método utiliza la derivada de la función procedemos a derivar:

Escribimos la función

```
function [f,df] = Problema12(x,T)
k=1;
M=70;
f = k.*(M-T);
df = -1 ;
end
```

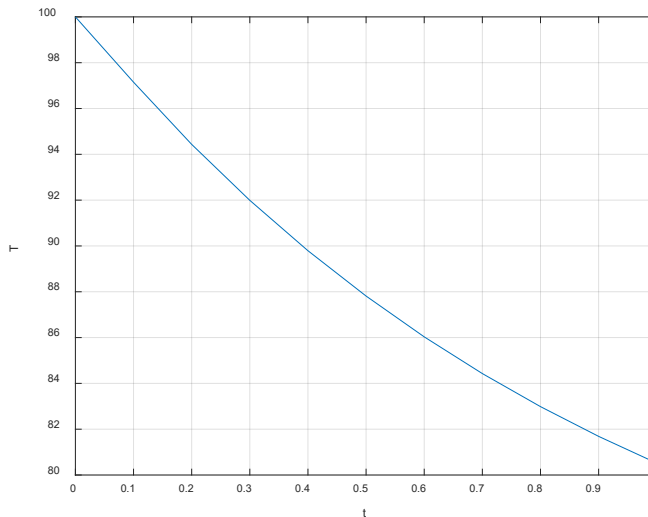
Calculamos el valor de N . Partiendo de $h = \frac{b-a}{N}$ y despejando se obtiene $N = \frac{b-a}{h}$

Donde $N = (1-0)/0.1$ obteniendo el número de iteraciones $N = 10$

Llamamos al método para graficar la solución del problema

```
>> [x,y]=AM4_Ecu('Problema12',0,1,10,100);
>> plot(t,y),grid on,xlabel('x'),ylabel('y')
```

Figura 3.15: Representación de la solución del “Problema 12” con AM2 para $t=1$



Fuente: Autores

b) 2 minutos

Solución

Utilizamos la misma función del apartado a

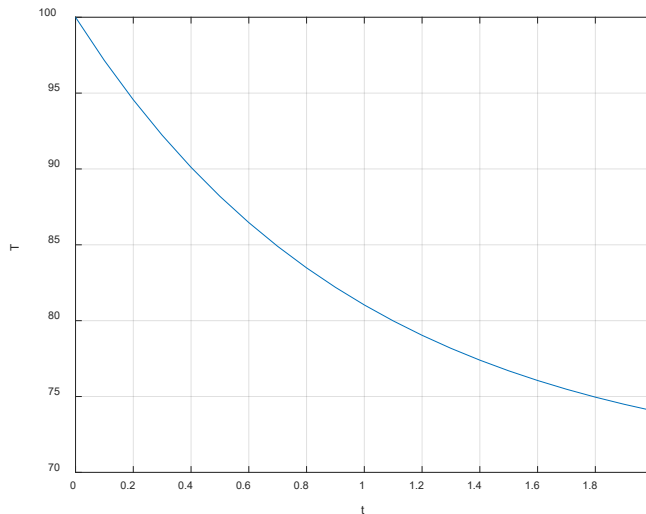
Calculamos el valor de N . Partiendo de $h = \frac{b-a}{N}$ y despejando se obtiene $N = \frac{b-a}{h}$

Donde $N = (2-0)/0.1$ obteniendo el número de iteraciones $N = 20$

Procedemos a llamar al método para encontrar la solución

```
>> [x,y]=AM4_Ecu('Problema12',0,2,20,100);  
>> plot(x,y),grid on,xlabel('t'),ylabel('T')
```

Figura 3.16: Representación de la solución del “Problema 12” con AM2 para $t=2$



Fuente: Autores

Problema 13

La ley de Stefan de radiación establece que la razón de cambio de la temperatura de un cuerpo a $T(t)$ grados, que se encuentra en un medio a $M(t)$ grados es proporcional a $M^4 - T^4$. Es decir

$$\frac{dT}{dt} = K(M^4 - T^4)$$

Donde K es una constante. Sea $K = 40^{-4}$ y suponga que la temperatura del medio es constante, $M(t) = 70$. Si $T(0) = 100$, use el método de AB4 con $h = 0.1$ para aproximar la solución

Partimos de la ecuación diferencial

$$\frac{dT}{dt} = 40^{-4}(70^4 - T^4)$$

Encontramos la derivada de la función

$$F(T) = K(M^4 - T^4)$$

$$F(T) = -4KT^3$$

Escribimos la función en *Matlab*

```
function [f,df] = Problema13(t,T)
k=40.^-4;
M=70.^4;
    f = k.*(M-T.^4);
    df = -4*k*M.^3 ;
end
```

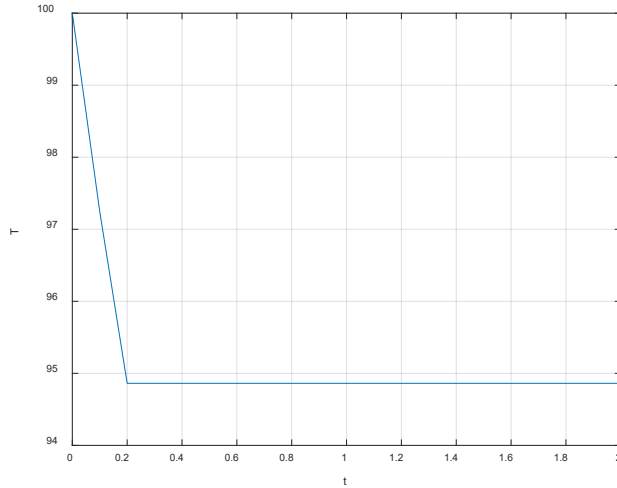
Calculamos el valor de N . Partiendo de $h = \frac{b-a}{N}$ y despejando se obtiene $N = \frac{b-a}{h}$

Donde $N = (2-0)/0.1$ obteniendo el número de iteraciones $N = 20$

Procedemos a en contra la solución utilizando *Matlab*

```
>> [x,y]=AM4_Ecu('Problema13',0,2,20,100);
>> plot(x,y),grid on,xlabel('t'),ylabel('T')
```

Figura 3.17: Representación de la solución del “Problema 13” con AM2 para $t=2$



Fuente: Autores

Problema 14

Un proyectil de masa $m = 0.11\text{Kg}$ que es lanzado verticalmente hacia arriba con una velocidad inicial de $v(0)=8\text{ m/s}$, disminuye su velocidad por efecto de la fuerza de gravedad $F_g = -mg$ y por la resistencia del aire $F_r = Kv$, donde $g = 9.8\text{ m/s}^2$ y 0.002 kg/m . La ecuación diferencial de la velocidad está dada por:

$$mv' = -mg - kv$$

- a) Calcule la velocidad después de 0.1, 0.2, 0.3 y 1 *segundo* si $h = 0.01$

Solución

Partimos de la ecuación diferencial

$$v' = \frac{-mg - kv}{m}, \quad v(0) = 8\text{ m/s}$$

Encontramos la derivada de la función para aplicar el método de AM2

$$F(v) = \frac{-mg - kv}{m}$$

$$F(v) = \frac{-k}{m}$$

Creamos la función en Matlab

```
function [f,df] = Problema14(t,v)
m=0.11;
g=9.8;
k=0.002;
f = (-m.*g-k.*v)./m;
df = -k./m;
end
```

Cuando $t = 0.1s$

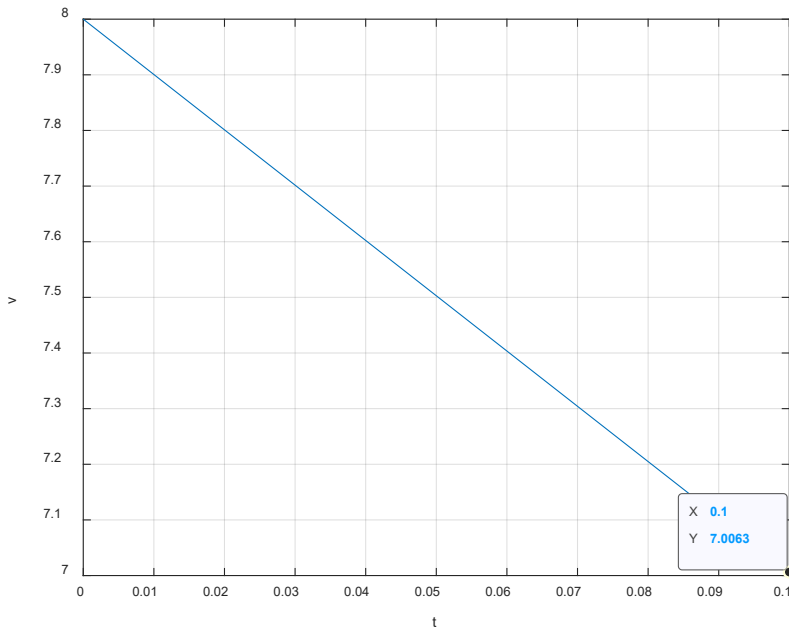
Calculamos el valor de N . Partiendo de $h = \frac{b-a}{N}$ y despejando se obtiene $N = \frac{b-a}{h}$

Donde $N = (0.1-0)/0.01$ obteniendo el número de iteraciones $N = 10$

Procedemos a llamar al método para encontrar la solución

```
>> [x,y]=AM2_Ecu('Problema14',0,0.1,10,8);
>> plot(x,y),grid on,xlabel('t'),ylabel('v')
```

Figura 3.18: Representación de la solución del “Problema 14” con AM2 para $t=0.1$



Fuente: Autores

```
>> X= [x(11)]  
X =  
    0.1000  
>> Y= [y(11)]  
Y =  
    7.0063
```

La velocidad después de 0.1 s es $v = 7.0063 \text{ m/s}$

Cuando $t = 0.2s$

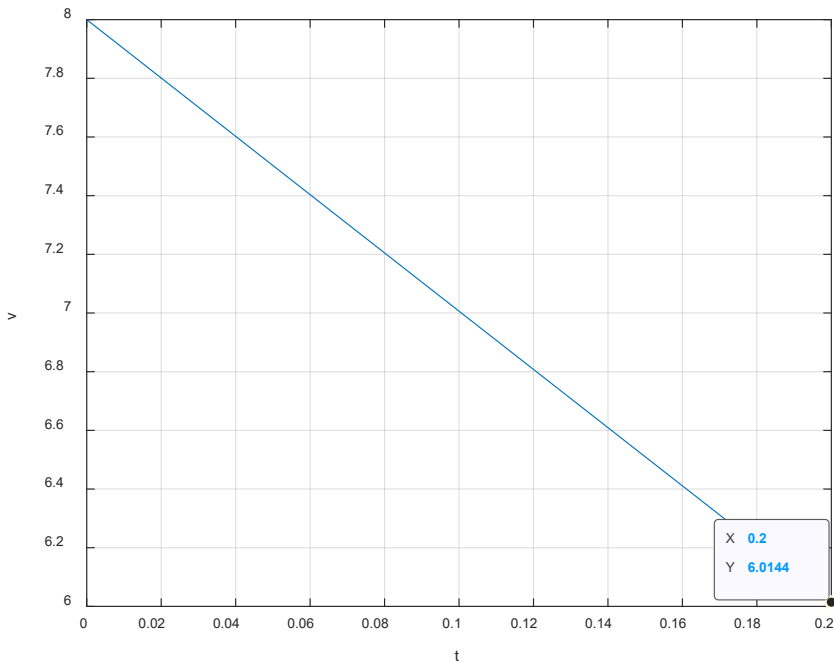
Calculamos el valor de N . Partiendo de $h = \frac{b-a}{N}$ y despejando se obtiene $N = \frac{b-a}{h}$

Donde $N = (0.2-0)/0.01$ obteniendo el número de iteraciones $N = 20$

Procedemos a llamar al método para graficar la solución

```
>> [x,y]=AM2_Ecu('Problema14',0,0.2,20,8);  
>> plot(x,y),grid on,xlabel('t'),ylabel('v')
```

Figura 3.19: Representación de la solución del “Problema 14” con AM2 para $t=0.2$



Fuente: Autores

Encontramos la solución cuando $t = 0.2$

```
>> X=[x(21)]
```

```
X =
```

```
0.2000
```

```
>> Y=[y(21)]
```

```
Y =
```

```
6.0144
```

Cuando $t = 0.3s$

Calculamos el valor de N . Partiendo de $h = \frac{b-a}{N}$ y despejando se obtiene $N = \frac{b-a}{h}$

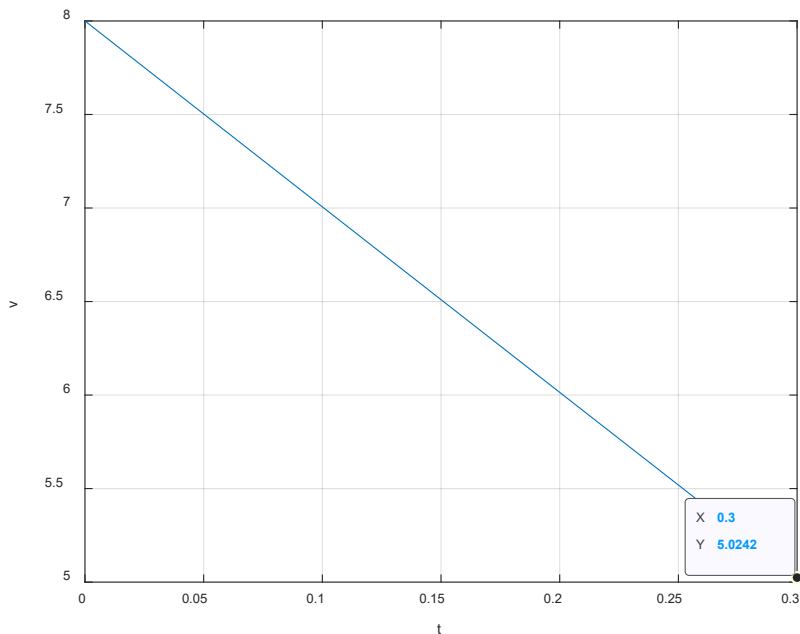
Donde $N = (0.3-0)/0.01$ obteniendo el número de iteraciones $N = 30$

Procedemos a llamar al método para graficar la solución

```
>> [x,y]=AM2_Ecu('Problema14',0,0.3,30,8);
```

```
>> plot(x,y),grid on,xlabel('t'),ylabel('v')
```

Figura 3.20: Representación de la solución del “Problema 14” con AM2 para $t=0.3$



Fuente: Autores

Encontramos la solución cuando $t=0.3$

```
>> X= [x(31)]  
X =  
    0.3000  
>> Y= [y(31)]  
Y =  
    5.0242
```

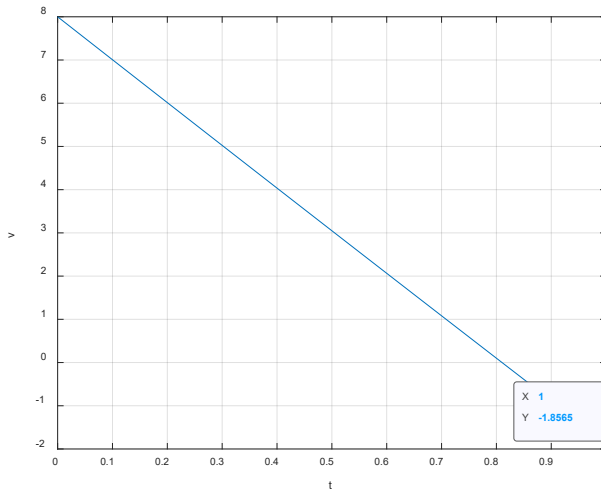
Cuando $t = 1s$

Calculamos el valor de N . Partiendo de $h = \frac{b-a}{N}$ y despejando se obtiene $N = \frac{b-a}{h}$

Donde $N = (1-0)/0.01$ obteniendo el número de iteraciones $N = 100$

```
>> [x,y]=AM2_Ecu('Problema14',0,1,100,8);  
>> plot(x,y),grid on,xlabel('t'),ylabel('v')
```

Figura 3.21: Representación de la solución del “Problema 14” con AM2 para $t=1$



Fuente: Autores

Encontramos la solución cuando $t=1s$

```
>> X= [x(101)]  
X =  
    1  
>> Y= [y(101)]  
Y =  
   -1.8565
```

Problema 15

Un tanque cilíndrico de $5m$ de diámetro y $11m$ de largo aislado con asbesto se carga con un líquido que está a $220^{\circ}F$ y el cual se deja reposar durante 5 días. A partir de los datos del diseño del tanque, las propiedades térmicas y físicas del líquido, y el valor de la temperatura ambiente, se encuentra la ecuación:

$$\frac{dT}{dt} = 0.615 + 0.175 \cos\left(\frac{\pi t}{12}\right) - 0.0114T$$

Cuál es la temperatura final del líquido si $h = 0.1$

Solución

Partimos de la ecuación

$$\frac{dT}{dt} = 0.615 + 0.175 \cos\left(\frac{\pi t}{12}\right) - 0.0114T$$

Encontramos la derivada de la función en esta ocasión utilizando *Matlab*

```
>> syms t T
>> f=0.615+0.175.*cos(pi.*t./12)-0.0114.*T;
>> diff(f,T)
ans =
-57/5000
```

Procedemos a crear la función una vez encontrada la derivada de la función

```
function [f,df] = Problema15(t,T)
    f=0.615+0.175.*cos(pi.*t./12)-0.0114.*T ;
    df=-57/5000;
end
```

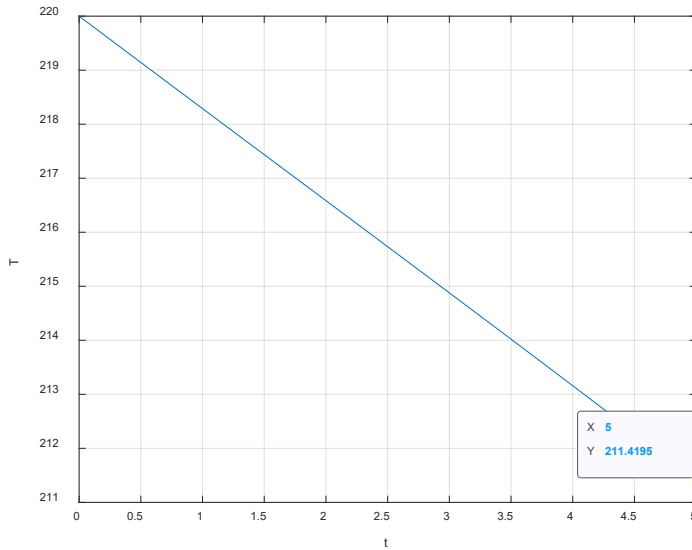
Calculamos el valor de N . Partiendo de $h = \frac{b-a}{N}$ y despejando se obtiene $N = \frac{b-a}{h}$

Donde $N = (5-0)/0.1$ obteniendo el número de iteraciones $N = 50$

Procedemos a llamar al método y graficamos la función

```
>> [x,y]=AM4_Ecu('Problema15',0,5,50,220);
>> plot(x,y),grid on,xlabel('t'),ylabel('T')
```

Figura 3.22: Representación de la solución del “Problema 15” con AM4



Fuente: Autores

La temperatura final del líquido a los 5 días es de 211.41.95°F

Problema 16

En estudio del campo electrónico inducido por dos líneas de transmisión cercanas, surge una ecuación de la forma

$$\frac{dz}{dx} + g(x)z^2 = f(x)$$

Sean $f(x) = 5x + 2$, $g(x) = x^2$ y $z(0)=1$. encuentre su aproximación con si $h = 0.1$ y $x \in [0 1]$

Solución

$$\frac{dz}{dx} + x^2 z^2 = 5x + 2$$

$$\frac{dz}{dx} = 5x + 2 - x^2 z^2, \quad x \in [0 1]$$

Una vez encontrada la ecuación diferencial del problema derivamos utilizando *Matlab*

```
>> f=5.*x+2-x.^2.*z^2
f =
-x^2*z^2 + 5*x + 2
>> diff(f,z)
ans =
-2*x^2*z
```

Creamos la función en *Matlab*

```
function [f,df] = Problema16(x,z)
f=5.*x+2-x.^2.*z^2;
df=-2*x^2*z;
end
```

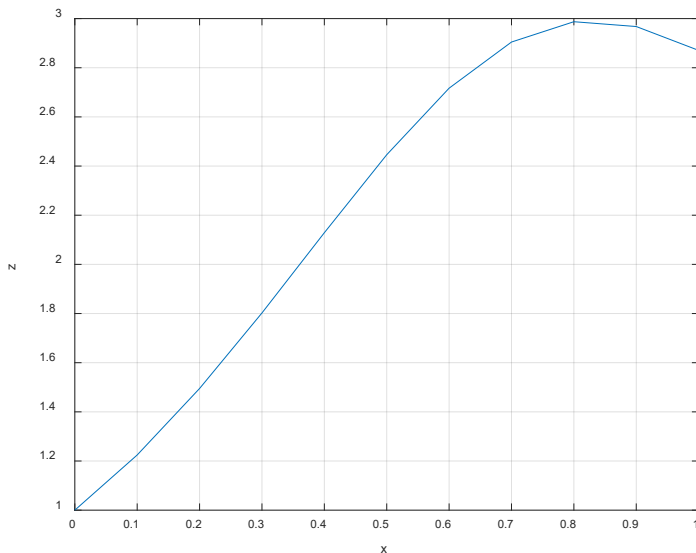
Calculamos el valor de N . Partiendo de $h = \frac{b-a}{N}$ y despejando se obtiene $N = \frac{b-a}{h}$

Donde $N = (1-0)/0.1$ obteniendo el número de iteraciones $N = 10$

Ahora procedemos a llamar al método de AM4 para graficar la solución del problema

```
>> [x,y]=AM4_Ecu('Problema16',0,1,10,1);
>> plot(x,y),grid on,xlabel('t'),ylabel('T')
```

Figura 3.23: Representación de la solución del “Problema 16” con AM4



Fuente: Autores

x	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1
z	1.000	1.224	1.495	1.802	2.128	2.446	2.716	2.904	2.987	2.967	2.870

Problema 17

Use el método de AM4 con $h = 0.1$ para aproximar la solución de:

$$y' = 3\cos(y-5x), y(0)=0$$

En los puntos $x = 1,2,3,4$. utilice sus respuestas para trazar una grafica aproximada de la solución en $[0,4]$.

Solución

$$y' = 3\cos(y-5x), y(0)=0$$

Encontramos la derivada para utilizar el método

```
>> syms x y
>> f=3.*cos(y-5.*x)
f =
3*cos(5*x - y)
>> diff(f,y)
ans =
3*sin(5*x - y)
```

Una vez encontrada la derivada de la ecuación diferencial escribimos la función del problema

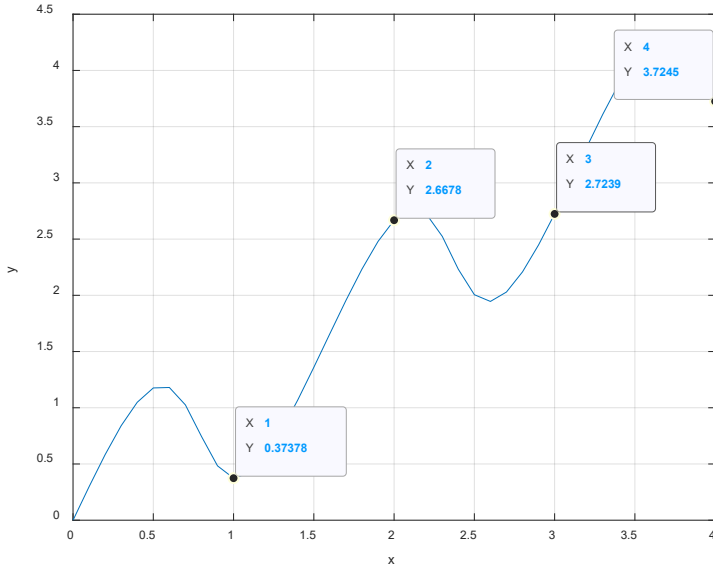
```
function [f,df] = Problema17(x,y)
f=3.*cos(y-5.*x);
df=3*sin(5*x - y);
end
```

Calculamos el valor de N . Partiendo de $h = \frac{b-a}{N}$ y despejando se obtiene $N = \frac{b-a}{h}$

Donde $N = (4-0)/0.1$ obteniendo el número de iteraciones $N = 40$

Procedemos a llamar el método para encontrar la solución

```
>> [x,y]=AM4_Ecu('Problema17',0,4,40,0);
>> plot(x,y),grid on,xlabel('x'),ylabel('y')
```

Figura 3.24: Representación de la solución del “Problema 17” con AM4

Fuente: Autores

Problema 18

Sea el siguiente problema de valor inicial:

$$y' = \frac{1}{t(y^2 + y)}, \quad t \in [1,3], \quad y(1) = 2$$

Tomando como $h = 0.1$

Solución

$$y' = \frac{1}{t(y^2 + y)}, \quad t \in [1,3], \quad y(1) = 2$$

Encontramos la derivada para utilizar el método

```
>> syms t y
>> f=1./(t.*(y.^2+y))
f =
1/(t*(y^2 + y))
>> diff(f,y)
ans =
-(2*y + 1)/(t*(y^2 + y)^2)
```

Escribimos la función en *Matlab*

```
function [f,df] = Problema18(t,y)
    f=1./(t.*(y.^2+y));
    df=-(2*y + 1)/(t*(y^2 + y)^2);
end
```

Calculamos el valor de N . Partiendo de $h = \frac{b-a}{N}$ y despejando se obtiene $N = \frac{b-a}{h}$

Donde $N = (3-1)/0.1$ obteniendo el número de iteraciones $N = 20$

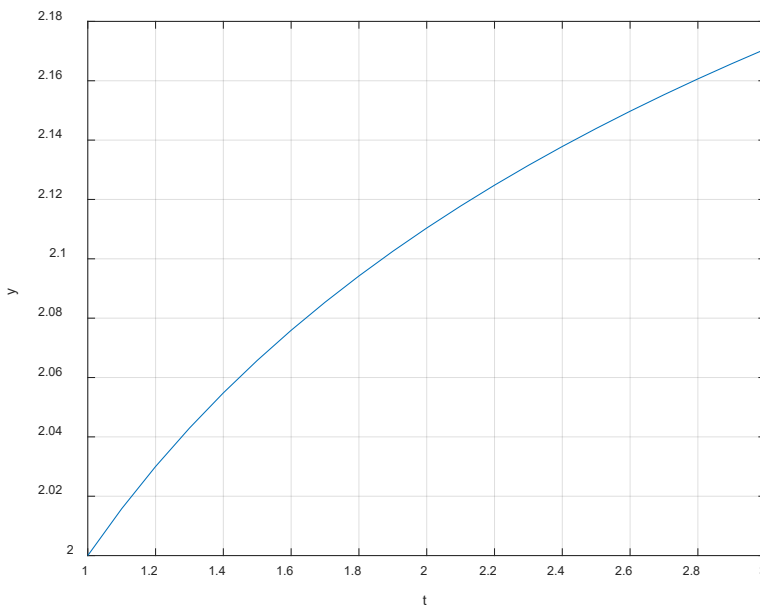
Graficamos la solución de la ecuación diferencial

```
>> [x,y]=AM4_Ecu('Problema18',1,3,20,2);
>> plot(x,y),grid on,xlabel('t'),ylabel('y')
```

Encontramos la solución de la ecuación diferencial

```
>> [x,y]=AM4_Ecu('Problema18',1,3,20,2);
>> plot(x,y),grid on,xlabel('t'),ylabel('y')
```

Figura 3.25: Representación de la solución del “Problema 18” con AM4



Fuente: Autores

Problema 19

Sea el siguiente problema de valor inicial:

$$y' = \sin(t) + e^{-t}, t \in [1,4], y(1) = 0$$

Tomando como $h = 0.1$

Solución

$$y' = \sin(t) + e^{-t}, t \in [1,4], y(1) = 0$$

Encontramos la derivada para utilizar el método

```
>> f=sin(t)+exp(-t)
f =
exp(-t) + sin(t)
>> diff(f,y)
ans =
0
```

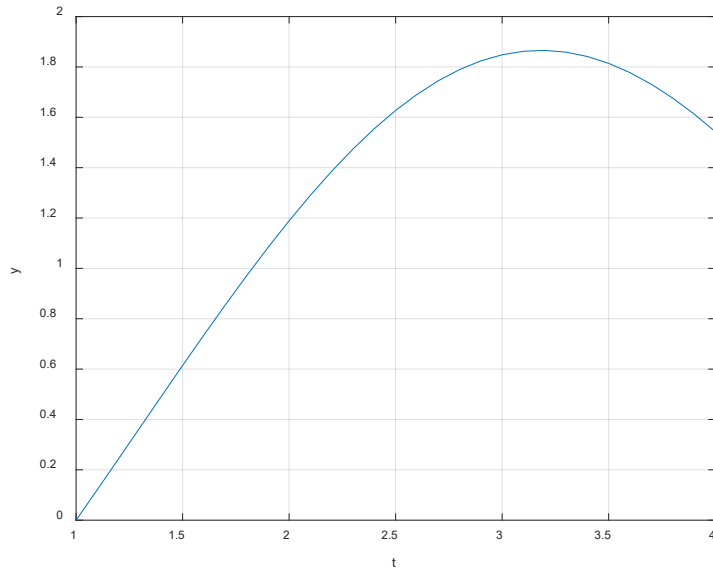
Calculamos el valor de N . Partiendo de $h = \frac{b-a}{N}$ y despejando se obtiene $N = \frac{b-a}{h}$

Donde $N = (4-1)/0.1$ obteniendo el número de iteraciones $N = 30$

Encontramos la solución

```
>> [x,y]=AM4_Ecu('Problema19',1,4,30,0);
>> plot(x,y),grid on,xlabel('t'),ylabel('y')
```

Figura 3.26: Representación de la solución del “Problema 19” con AM4



Fuente: Autores

Problema 20

Dada la ecuación de primer orden:

$$\frac{dx}{dt} = -700x - 1000e^{-t}, x(0) = 4$$

En el periodo de tiempo $0 \leq t \leq 5$ con $h = 0.1$

a) Escriba una función que describa el problema

Encontramos la derivada de la función

```
>> syms t x
>> f=-700.*x-1000.*exp(-t)
f=
- 700*x - 1000*exp(-t)
>> diff(f,x)
ans =
-700
```

Escribimos la función

```
function [f,df] = Problema20(t,x)
    f=-700.*x-1000.*exp(-t);
    df=-700;
end
```

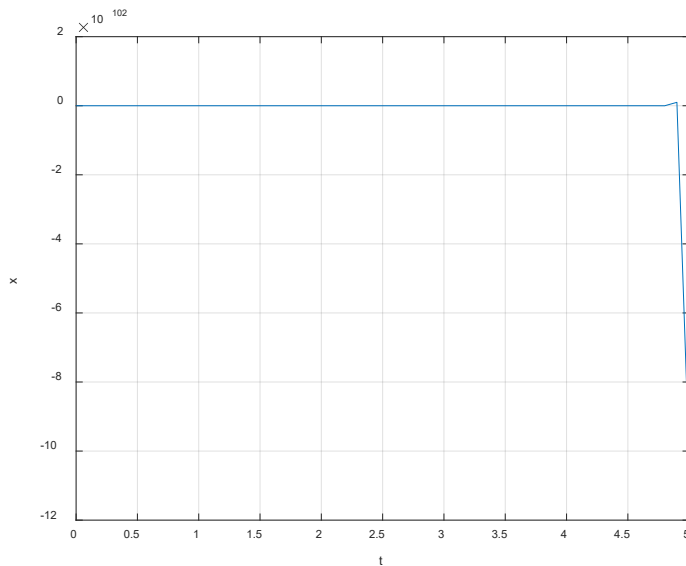
b) Resuelva el PVI para el intervalo $0 \leq t \leq 5$ con $h = 0.1$

Calculamos el valor de N . Partiendo de $h = \frac{b-a}{N}$ y despejando se obtiene $N = \frac{b-a}{h}$

Donde $N = (5-0)/0.1$ obteniendo el número de iteraciones $N = 50$

```
>> [x,y]=AM4_Ecu('Problema20',0,5,50,4);
>> plot(x,y),grid on,xlabel('t'),ylabel('y')
```

Figura 3.27: Representación de la solución del “Problema 20” con AM4



Fuente: Autores

c) Indica una estimación del orden de convergencia

```
>> [x,y1]=AM2_Ecu('Problema20',0,5,50*1,4);sol1=y1(:,1);
>> [x,y2]=AM2_Ecu('Problema20',0,5,50*2,4);sol2=y2(:,1);
>> [x,y3]=AM2_Ecu('Problema20',0,5,50*4,4);sol3=y3(:,1);
>> [x,y4]=AM2_Ecu('Problema20',0,5,50*8,4);sol4=y4(:,1);
>> [x,y5]=AM2_Ecu('Problema20',0,5,50*16,4);sol5=y5(:,1);
```

```
>> [x,y6]=AM2_Ecu('Problema20',0,5,50*32,4);sol6=y6(:,1);
>> [x,y7]=AM2_Ecu('Problema20',0,5,50*64,4);sol7=y7(:,1);
>> e1=abs(sol1-sol2(1:2:end)); e2=abs(sol2-sol3(1:2:end));
>> e3=abs(sol3-sol4(1:2:end)); e4=abs(sol4-sol5(1:2:end));
>> e5=abs(sol5-sol6(1:2:end)); e6=abs(sol6-sol7(1:2:end));
>> relacion=[max(e1)/max(e2) max(e2)/max(e3) max(e3)/max(e4) max(e4)/
max(e5) max(e5)/max(e6) ]'
```

```
relacion =
    0.0000
    0.0000
    1.5387
     0
    Inf<
```

3.4 EJERCICIOS PROPUESTOS

Ejercicio 1

Un cuerpo que tiene una temperatura de 70°F es depositado (en el tiempo $t = 0$) en un lugar donde la temperatura se mantiene a 40°F. Después de 3 min, la temperatura del cuerpo ha disminuido a 60°F.

- Halle la ecuación que gobierna al sistema.
- Si las condiciones iniciales son T_0 y T_∞ para este caso. ¿Cuál es la temperatura después de 5 minutos? Utilice Adams-Moulton AM2

Ejercicio 2

Un paracaidista de masa M kg salta desde un avión en $t = 0$. Consideremos que la velocidad vertical inicial del paracaidista es cero en $t = 0$ y que la caída es vertical. Si el arrastre aerodinámico está dado por $F_{aire} = cv^2$, donde c es una constante y v es la velocidad vertical (positiva hacia abajo), asuma $M = 70$ kg, $c = 0.27$ kg/m y $h = 0.1$. Para la primera ley de Newton, el equilibrio de las fuerzas satisface.

$$M \frac{dv(t)}{dt} = -F_{aire} + gM$$

- a) Halle la velocidad del paracaidista para $t \leq 20$ s. Utilice Adams-Moulton AM2.

Ejercicio 3

La velocidad de un cuerpo en caída se modela mediante el problema de valor inicial:

$$m \frac{dv(t)}{dt} = mg - kv \quad v(0) = v_0$$

De acuerdo con la hipótesis de que la fuerza debida a la resistencia del aire es de $-kv$. Sin embargo, en ciertos casos la fuerza originada por la resistencia del aire se comporta más como $-kv^r$ donde $r > 1$ dado por el modelo:

$$m \frac{dv(t)}{dt} = mg - kv^r \quad v(0) = v_0$$

- a) Para estudiar el efecto de cambiar el parámetro de r considerar $m = 1$, $g = 9.81$, $k = 2$ y $v_0 = 0$ utilice $h = 0.2$ para aproximar la solución de la ecuación en el intervalo $0 \leq t \leq 5$ para $r = 1, 1.5$ y 2 . Utilice Adams-Moulton AM2.

Ejercicio 4

En un circuito de voltaje impreso E que tiene la resistencia R la inductancia L y la capacitancia C en paralelo, la corriente i satisface la ecuación diferencial.

$$\frac{di}{dt} = C \frac{d^2E}{dt^2} + \frac{1}{R} \frac{dE}{dt} + \frac{1}{L} E$$

Supongamos que $C = 0.3$ faradios, $R = 1.4$ ohmios, $L = 1.7$ henrios y que el voltaje esta dado por $E(t) = e^{-0.06t} \text{sen}(2t - \pi)$.

- a) Si $i(0) = 0$, calcule la corriente i con los valores $h = 0.1$, y grafique la solución. Utilice Adams-Moulton AM2.

Ejercicio 5

Un proyectil de $\text{masa} = 0.11$ Kg es lanzado verticalmente hacia arriba con una velocidad inicial $V(0) = 8$ m/s.

El proyectil disminuye su velocidad por efecto de la fuerza de gravedad $Fg = -mg$ y por la resistencia del aire $Fr = kv|v|$ donde $g = 9.8 \text{ m/s}^2$ y $k = 0.002 \text{ Kg/m}$.

La ecuación diferencial de la velocidad está dada por:

$$m \frac{\delta v}{\delta t} = -mg - kv|v|$$

- Escriba una función que describa la ecuación diferencial de primer orden.
- Resuelva el PVI para el intervalo $t \in [0 \quad 1]$ con subintervalo $h = 0.2$ y representar $y(t)$. Utilice Adams-Moulton AM2.

Ejercicio 6

Sea el siguiente problema de valor inicial

$$y'(t) = (1 - 2t) y(t) \quad t \in [0 \quad 3]$$

Con las condiciones iniciales $y(0) = 1$

- Escriba una función que describa la ecuación diferencial de primer orden.
- Resuelva el PVI para el intervalo $t \in [0 \quad 3]$ con subintervalo $N = 4$ y representar $y(t)$. Utilice Adams-Moulton AM4.
- Indicar los valores de $y(t)$ para $t \in \{0 \quad 1.5 \quad 2.25\}$

Ejercicio 7

Consideremos el problema de valor inicial

$$y'(t) = \cos(2t) + \sin(3t) \quad t \in [0 \quad 1]$$

Con las condiciones iniciales $y(0) = 1$, cuya solución exacta es

$$y(t) = \frac{1}{2} \sin(2t) - \frac{1}{3} \cos(3t) + \frac{4}{3}$$

- Escriba una función que describa la ecuación diferencial de primer orden.
- Resuelva el PVI para el intervalo $t \in [0,1]$ con pasos $h = 0.1$ y representar $y(x)$. Utilice Adams-Moulton AM4.
- Resuelva el PVI para el intervalo $t \in [0,1]$ con pasos $h = 0.1$ y representar $y(x)$ y su campo de direcciones.

- d) Compara gráficamente la solución exacta con la solución aproximada, grafica el error cometido y calcula su error máximo.

Ejercicio 8

Consideremos el problema de valor inicial $\lambda = 50$

$$y'(x) = -2\pi \sin(2\pi x) - \frac{1}{\epsilon}(y - \cos(2\pi x)) \quad x \in [0, 10]$$

Con las condiciones iniciales $y(0)=1$, el problema se hace rígido cuando $\epsilon \rightarrow 0$. Su solución exacta es $y(t) = \cos(2\pi t)$.

- a) Escriba una función que describa la ecuación diferencial de primer orden. Utiliza $\epsilon = 10^{-6}$
- d) Resuelva el PVI para el intervalo $x \in [0,10]$ con pasos $N = 20$, una tolerancia e^{-6} y representar $y(x)$. Utilice Adams-Moulton AM4.

Ejercicio 9

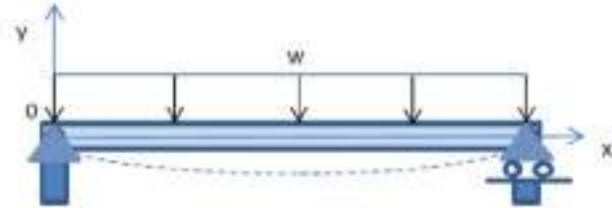
La velocidad de desintegración del radio es proporcional a la cantidad, siendo esta constante de proporcionalidad $k = 4.1 * 10^{-4}$.

- a) Plantea el problema de valor inicial de manera que podamos estudiar la variación de la cantidad de radio existente en una muestra de 10gr.
- b) Resuelve el método y representa $y(t)$ utilizando Heun con $n=10$, la cantidad de radio que quedaría en la muestra al cabo de 1500 años. Utilice Adams-Moulton AM4.
- c) Comparar gráficamente la solución con dichas aproximaciones, grafica el error cometido y calcula su error máximo.

Ejercicio 10

La ecuación diferencial básica de la curva elástica para una viga con carga uniforme (ver figura) está dada por

$$EI \frac{\delta^2 y}{\delta x^2} = \frac{wLx}{2} - \frac{wx^2}{2}$$



Donde E es el módulo de elasticidad, I momento de inercia.

Aplique los siguientes parámetros:

$$E = 30000ksi, I = 800in^2, w = 1 \text{ kip}/in, L = 10ft$$

- Encuentre el sistema de ecuaciones diferenciales equivalente a dicha ecuación.
- Escriba una función que describa la ecuación diferencial de primer orden
- Resuelve el método y representa $y(x)$ utilizando Adams-Moulton AM4. con $h = 2$

CAPÍTULO IV

MÉTODOS PREDICTOR CORRECTOR

A partir de los resultados de un método explícito, los métodos implícitos se utilizan para mejorar las aproximaciones obtenidas. La combinación de los métodos explícito e implícito dan lugar a lo que se conoce como métodos predictor corrector, donde la predicción es llevada a cabo por el método explícito y la corrección por el método implícito.

4.1 ADAMS BASHFORTH MOULTON DE DOS PASOS

En primer lugar, obtenemos la solución por el método de Adams-Bashforth. Como es el método predictor, llamaremos p_k a sus valores.

$$p_{k+1} = p_k + \frac{h}{2} (3f(t_k, p_k)) - f(t_{k-1}, p_{k-1})$$

A partir de estos valores predictores, aplicamos el método de Adams Moulton:

$$y_{k+1} = y_k + \frac{h}{2} (f(t_{k+1}, p_{k+1})) + f(t_k, y_k)$$

4.1.1 Algoritmo de Adams- Bashforth-Moulton ABM2

Para la construcción del algoritmo de ABM2 consideramos

- Obtención de la variable independiente discretizada.
- Inicialización del vector solución
- Predictor

$$\begin{aligned} k1 &= \text{feval}(\text{fun}, t(k), p(k)); \\ k2 &= \text{feval}(\text{fun}, t(k-1), p(k-1)); \\ p(k+1) &= p(k) + h/2 * (3 * k1 - k2) \end{aligned}$$

- Corrector

$$\begin{aligned} k1 &= \text{feval}(\text{fun}, t(k), y(k)); \\ y(k+1) &= y(k) + h/2 * (\text{feval}(\text{Fun}, t(k+1)) + k1); \end{aligned}$$

De esta manera construimos el código en *Matlab* para Adams Bashforth Moulton de orden para ecuaciones.

```
function [t,y]=ABM2(f,a,b,ya,N)
h=(b-a)/N;
t=a:h:b;
p(1)=ya;
%Predictor: AB2
k1=h*feval(f,t(1),p(1));
k2=h*feval(f,t(2),p(1)+k1);
p(2)=p(1)+k1/2+k2/2;
for k=2:N
    k1=feval(f,t(k),p(k));
    k2=feval(f,t(k-1),p(k-1));
    p(k+1)=p(k)+h/2*(3*k1-k2);
end
t=t(:);p=p(:);
%Corrector: AM2
y(1:2)=p(1:2);
for k=2:N
    k1=feval(f,t(k),y(k));
    y(k+1)=y(k)+h/2*(feval(f,t(k+1),p(k+1))+k1);
end
```

4.1.2 Algoritmo de Adams- Bashforth-Moulton ABM4

Para la construcción del algoritmo de ABM4 consideramos

- Obtención de la variable independiente discretizada.
- Inicialización del vector solución
- Predictor

```
k1=h*feval(f,x(k),y(k));
k2=h*feval(f,x(k)+h/2,y(k)+k1/2);
k3=h*feval(f,x(k)+h/2,y(k)+k2/2);
```

```
k4=h*feval(f,x(k)+h,y(k)+k3);
y(k+1)=y(k)+(k1+2*k2+2*k3+k4)/6h/2*(3*k1-k2)
```

- Corrector

```
y1=y(k)+(h/24)*(55*ff(k)-59*ff(k-1)+37*ff(k-2)-9*ff(k-3));
y(k+1)=y(k)+(h/24)*(ff(k-2)-5*ff(k-1)+19*ff(k)+9*feval(f,x(k),y1));
```

De esta manera construimos el código en *Matlab* para Adams Bashforth Moulton para ecuaciones.

```
function [x,y]=ABM4(f,a,b,y0,N)
% Método de Adams-Bashforth Moulton 4 pasos, Runge-Kutta: Heun_orden 4
% Error local es O(h^5) error global O(h^4)
h=(b-a)/N; %tamaño de paso
x=a:h:b;
x=x(:);
y=zeros(N+1,1); %reserva de memoria
y(1)=y0;

for k=1:3 %3 pasos generados con RK4
    k1=h*feval(f,x(k),y(k));
    k2=h*feval(f,x(k)+h/2,y(k)+k1/2);
    k3=h*feval(f,x(k)+h/2,y(k)+k2/2);
    k4=h*feval(f,x(k)+h,y(k)+k3);
    y(k+1)=y(k)+(k1+2*k2+2*k3+k4)/6;
end

ff(1)=feval(f,x(1),y(1));
ff(2)=feval(f,x(2),y(2));
ff(3)=feval(f,x(3),y(3));

for k=4:N %1 paso = 4 pasos
    ff(k)=feval(f,x(k),y(k));
    y1=y(k)+(h/24)*(55*ff(k)-59*ff(k-1)+37*ff(k-2)-9*ff(k-3));
    y(k+1)=y(k)+(h/24)*(ff(k-2)-5*ff(k-1)+19*ff(k)+9*feval(f,x(k),y1));
end
end
```

4.1.3 Algoritmo de Adams- Bashforth-Moulton ABM4 para Sistemas de Ecuaciones

Para la construcción del algoritmo de ABM4 consideramos

- Obtención de la variable independiente discretizada.
- Inicialización del vector solución
- Predictor

```
k1=h*feval(f,t(k),y(k,:))';
k2=h*feval(f,t(k)+h/2,y(k,:)+k1/2)';
k3=h*feval(f,t(k)+h/2,y(k,:)+k2/2)';
k4=h*feval(f,t(k)+h,y(k,:)+k3)';
y(k+1,:)=y(k,:)+(k1+2*k2+2*k3+k4)/6;
```

- Corrector

```
ff(k,:)=feval(f,t(k),y(k,:))';
y1=y(k,:)+(h/24)*(55*ff(k,:)-59*ff(k-1,:)+37*ff(k-2,:)-9*ff(k-3,:));
y(k+1,:)=y(k,:)+(h/24)*(ff(k-2,:)-5*ff(k-1,:)+19*ff(k,:)+9*feval(f,-
t(k),y1)');
```

Una vez obtenido el algoritmo de Adams- Bashforth-Moulton construimos el código en *Matlab* para sistemas de ecuaciones.

```
function [t,y]=ABM4_Sis1(f,a,b,y0,N)
% Método de Adams-Bashforth 4, Runge-Kutta: 4
% Error local es O(h^5) error global O(h^4)
h=(b-a)/N; %tamaño de paso
t=a:h:b;
t=t(:);
y=zeros(N+1,length(y0)); %reserva de memoria
y(1,:)=y0;
for k=1:3 %3 pasos generados con RK4
    k1=h*feval(f,t(k),y(k,:))';
    k2=h*feval(f,t(k)+h/2,y(k,:)+k1/2)';
    k3=h*feval(f,t(k)+h/2,y(k,:)+k2/2)';
    k4=h*feval(f,t(k)+h,y(k,:)+k3)';
    y(k+1,:)=y(k,:)+(k1+2*k2+2*k3+k4)/6;
end
```

```

ff(1,:)=feval(f,t(1),y(1,:));
ff(2,:)=feval(f,t(2),y(2,:));
ff(3,:)=feval(f,t(3),y(3,:));
for k=4:N %1 paso = 4 pasos
    ff(k,:)=feval(f,t(k),y(k,:));
    y1=y(k,:)+(h/24)*(55*ff(k,:)-59*ff(k-1,:)+37*ff(k-2,:)-9*ff(k-3,:));
    y(k+1,:)=y(k,:)+(h/24)*(ff(k-2,:)-5*ff(k-1,:)+19*ff(k,:)+9*feval(f,t(k),y1));
end
end

```

4.2 PROBLEMAS PVI CON ADAMS BASHFORTH-MOULTON

Problema 1

La temperatura inicial de una pieza de metal es de 25°C. La pieza se calienta internamente mediante una corriente eléctrica a razón de $Q = 3000W$. La ecuación para la temperatura es

$$\frac{dT}{dt} = \frac{1}{V\rho c} [Q - \varepsilon\sigma A(T^4 - 298^4) - h_e A(T - 298)], \quad T(0) = 298K$$

Donde T esta en kelvin y

$k = 60 \text{ w/mK}$ (conductividad de Stefan-Boltzman)

$\sigma = 5.57 \times 10^{-8} \text{ W/m}^2 \text{ K}^4$ (cosntante de Stefan-Boltzman)

$A = 0.25\text{m}^2$ (área superficial)

$V=0.001\text{m}$ (volumen)

$c=900 \text{ J/kgK}$ (calor especifico)

$p = 3000 \text{ kg/m}^3$ (densidad)

$h_e = 30 \text{ J/m}^2 \text{ K}$ (coeficiente de transferencia de calor)

$\varepsilon = 0.8$ (emisividad)

Calcule la temperatura para $0 < t < 10$ min por el método predictor corrector con $h = 0.1$

$$\frac{dT}{dt} = \frac{1}{Vpc} [Q - \varepsilon\sigma A(T^4 - 298^4) - h_e A(T - 298)], \quad T(0) = 298K$$

Escribimos la función del problema

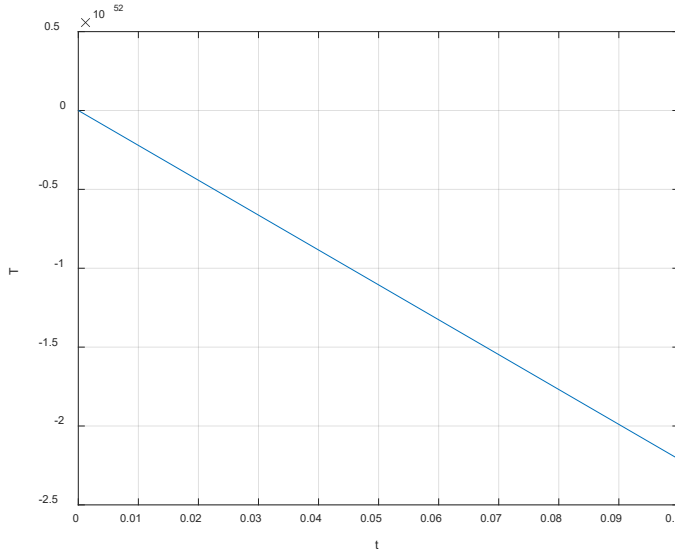
```
function f= problema1(t,T)
Q=3000;
o=5.67*exp(-8);
A=0.25;
V=0.001;
c=900;
p=3000;
h=30;
e=0.8;
f=(1./V.*c.*p).*(Q-(e.*o.*A).*(T.^4-298.^4)-(h.*A).*(T-298));
end
```

Calculamos el valor de N . Partiendo de $h = \frac{b-a}{N}$ y despejando se obtiene $N = \frac{b-a}{h}$

Donde $N = (10-0)/0.1$ obteniendo el número de iteraciones $N = 100$

Procedemos a llamar al método para encontrar la solución

```
>> [t,y]=ABM2('problema1',0,10,298,100);
>> plot(t,y),grid on,xlabel('t'),ylabel('T')
```

Figura 4.1: Representación de la solución del “Problema 1” con ABM2

Fuente: Autores

Problema 2

En el estudio del campo eléctrico inducido por dos líneas de transmisión cercana, surge una ecuación de la forma

$$\frac{dz}{dx} + g(x)z^2 = f(x), x \in [0, 4]$$

Sean $f(x) = 5x+2$ y $g(x) = z^2$. Si $z(0) = 1$, use ABM2 con $h = 0.01$.

Solución

$$\frac{dz}{dx} = f(x) - g(x)z^2$$

$$\frac{dz}{dx} = 5x + 2 - z^4$$

Escribimos la función en *Matlab* de la ecuación diferencial antes encontrada

```
function f= problema2(x,z)
    f=5.*x+2-z.^4;
end
```

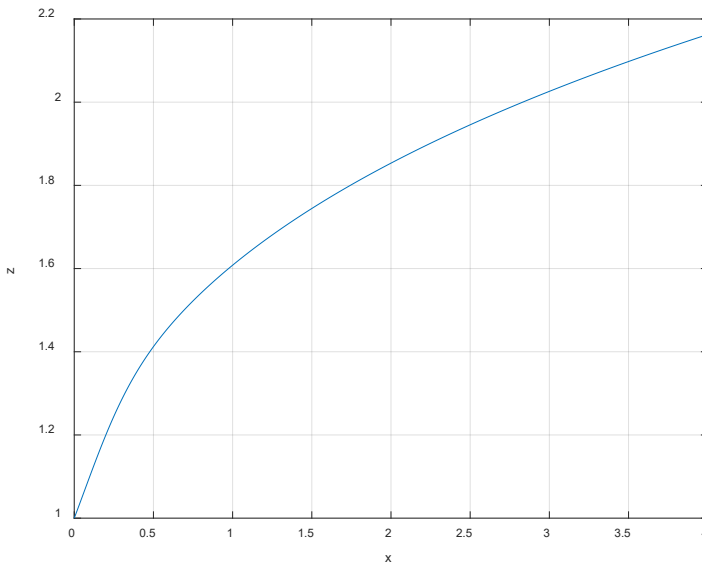
Calculamos el valor de N . Partiendo de $h = \frac{b-a}{N}$ y despejando se obtiene $N = \frac{b-a}{h}$

Donde $N = (4-0)/0.01$ obteniendo el número de iteraciones $N = 400$

Llamamos al método y graficamos la solución

```
>> [t,y]=ABM2('problema2',0,4,1,400);  
>> plot(t,y),grid on,xlabel('x'),ylabel('z')
```

Figura 4.2: Representación de la solución del “Problema 2” con ABM2



Fuente: Autores

Problema 3

Sea el sistema de ecuaciones diferenciales

$$\begin{aligned}x' &= y \\ y' &= -x - 2e^t + 1 \\ z' &= -x - e^t + 1\end{aligned}$$

Utiliza el método ABM2 para obtener la solución en $[0, 2]$, con $h = 0.2$, si $x(0) = 1, y(0) = 0, z(0) = 1$

Solución

$$\begin{aligned}x' &= y \\ y' &= -x - 2e^t + 1 \\ z' &= -x - e^t + 1\end{aligned}$$

Escribimos una función que describa el sistema de ecuaciones diferenciales

```
function f= problema3(t,Sistema)
x=Sistema(1);
y=Sistema(2);
z=Sistema(3);
f=[y;-x-2.*exp(t)+1;-x-exp(t)+1];
end
```

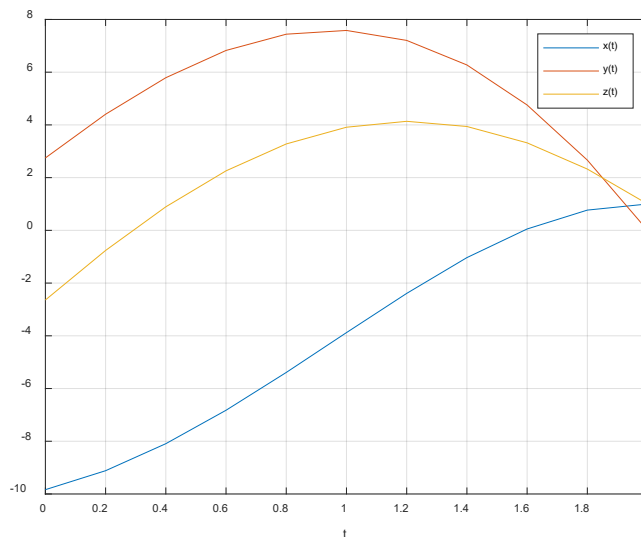
Calculamos el valor de N . Partiendo de $h = \frac{b-a}{N}$ y despejando se obtiene $N = \frac{b-a}{h}$

Donde $N = (2-0)/0.2$ obteniendo el número de iteraciones $N = 10$

Procedemos a llamar al método ABM2 para sistemas de ecuaciones para encontrar la solución

```
>> plot(t,y),grid on,xlabel('x'),ylabel('z')
>> plot(x,y),grid on,xlabel('t')
>> legend('x(t)', 'y(t)', 'z(t)')
```

Figura 4.3: Representación de la solución del “Problema 3” con ABM2 para sistemas de ecuaciones



Fuente: Autores

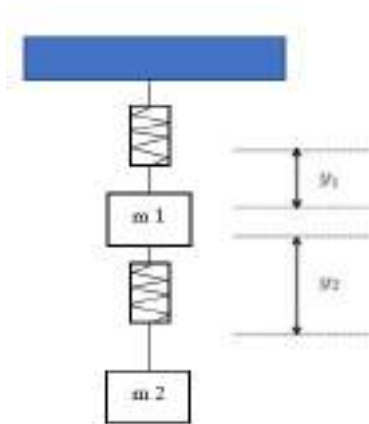
Problema 4

Sean las masas $m_1 = 1$ y $m_2 = 1$ sujetas a resortes de masas significantes, con constantes $k_1 = 6$ y $k_2 = 4$, a su vez los resortes están conectados como se muestran en la gráfica. Sea $y_1(t)$ e $y_2(t)$ los desplazamientos verticales de las masas con respecto a sus posiciones de equilibrio. La Ley de Hooke y la segunda Ley de Newton describen el movimiento del sistema mediante las siguientes ecuaciones diferenciales:

$$m_1 y_1'' = -k_1 y_1 + k_2 (y_2 - y_1)$$

$$m_2 y_2'' = -k_2 (y_2 - y_1)$$

Figura 4.4: Resortes



Fuente: Autores

Sujeto a las siguientes condiciones $y_1(0) = y_2(0) = 0$, $y_1'(0) = 1$, $y_2'(0) = -1$

- a) Expresa el sistema de orden dos como un sistema de 4 ecuaciones ordinarias

$$\begin{aligned}
 y_1 &= z_1 \\
 y_1' &= z_1' = z_2 \\
 y_1'' &= z_1'' = z_2' \\
 y''(t) &= \frac{-k_1 y_1 + k_2 (y_2 - y_1)}{m_1} \rightarrow z_2' = \frac{-k_1 z_1 + k_2 (z_3 - z_1)}{m_1} \\
 y_2 &= z_3 \\
 y_2' &= z_3' = z_4 \\
 y_2'' &= z_3'' = z_4' \\
 y_2'' &= \frac{-k_2 (y_2 - y_1)}{m_1} \rightarrow z_4' = \frac{-k_2 (z_3 - z_1)}{m_1}
 \end{aligned}$$

- b) Utiliza el método de ABM2 para sistemas de ecuaciones en el intervalo de tiempo $[0,100]$ t tomando 200 subintervalos y encuentre la aproximación a la solución

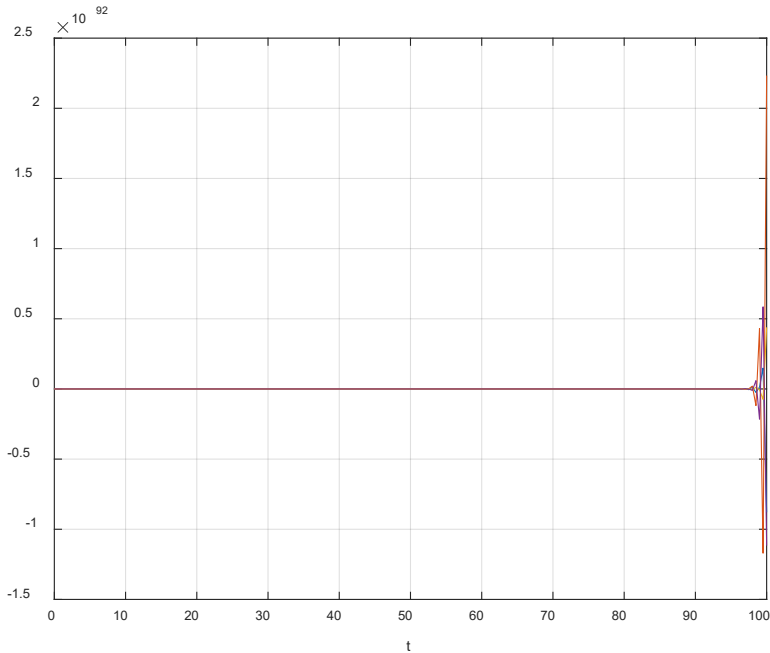
Procedemos a crear la función

```
function f= problema4(t,z)
k1=6;
k2=4;
m1=1;
f=[z(2);(-k1*z(1)+k2.*(z(3)-z(1)))./m1;z(4);(-k2.*(z(3)-z(1)))./m1];
end
```

ahora procedemos a llamar al método y graficamos la solución

```
>> [x,y] = ABM4_Sis('problema4',0,100,200,[0 0 1 -1]);
>> plot(x,y),grid on,xlabel('t')
```

Figura 4.5: Representación de la solución del “Problema 4” con ABM2 para sistemas de ecuaciones



Fuente: Autores

Problema 5

Las ecuaciones del movimiento de un satélite puesto en órbita desde la estación espacial internacional son:

$$x'' = -u \frac{x}{r^3}$$

$$y'' = -u \frac{y}{r^3}$$

Donde $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ es la distancia a la tierra, situada en el origen de coordenadas y $u = G (M_T + m_s) \approx 398598,309 \text{ km}^3/\text{s}^2$ es llamado constante gravitacional, en el que se considera nula la masa del satélite respecto a la Tierra.

- a) Convierte el sistema de orden dos en uno de primer orden:

$$x = z_1$$

$$x' = z_1' = z_2$$

$$x'' = z_1'' = z_2'$$

$$x''(t) = -u \frac{x}{r^3} \rightarrow z_2' = -u \frac{z_1}{\left(\sqrt{z_1^2 + z_3^2}\right)^3}$$

$$y = z_3$$

$$y' = z_3' = z_4$$

$$y'' = z_3'' = z_4'$$

$$y''(t) = -u \frac{y}{r^3} \rightarrow z_4' = -u \frac{z_3}{\left(\sqrt{z_1^2 + z_3^2}\right)^3}$$

- b) Considerando las condiciones iniciales que nos indica la situación de la estación espacial y las componentes de la velocidad inicial:

$$x(0)=42167,911km, x'(0) = -1.07168 Km/s$$

$$y(0) = 0km, y'(0) = 28827 Km/s$$

Resuelva el PVI encontrando la posición del satélite respecto a la Tierra 24 horas después de su lanzamiento

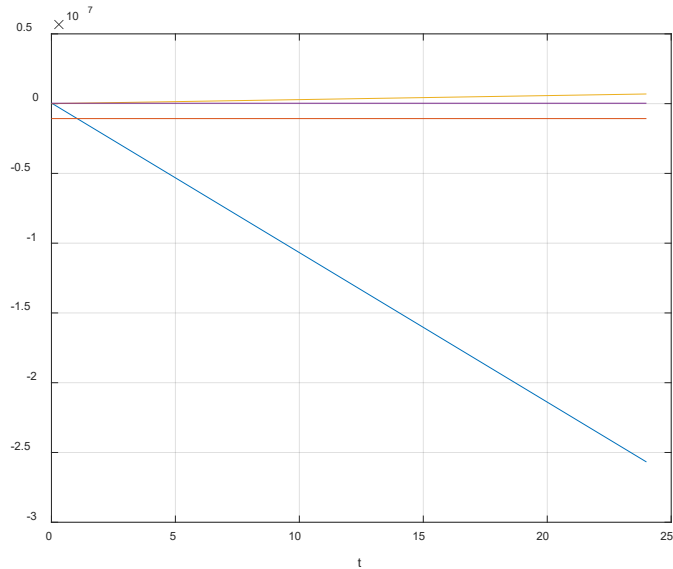
Escribimos la función del sistema de ecuaciones

```
function f= problema5(t,z)
u=398598.309;
f=[z(2);-u.*(z(1)./(sqrt(z(1).^2+z(3).^2).^3));z(4);-u.*(z(3)./(sqrt(z(1).^2+z(3).^2).^3)];
end
```

Procedemos a llamar el método y graficar las soluciones

```
>> [x,y] = ABM4_Sis('problema5',0,24,2400,[42167.911 -1071681 0
28827]);
>> plot(x,y),grid on,xlabel('t')
```

Figura 4.6: Representación de la solución del “Problema 5” con ABM2 para sistemas de ecuaciones



Fuente: Autores

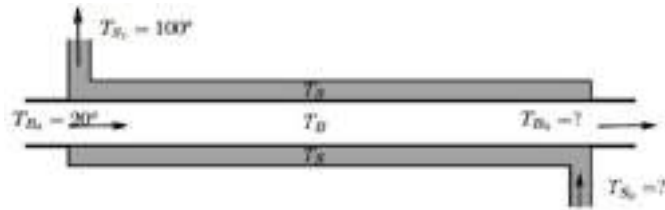
Problema 6

Se tiene un intercambiador de calor de tubos concéntricos en contracorriente y sin cambio de fase como se muestra en la figura. la ecuación que describen el intercambiador de calor en ciertas condiciones de operaciones es:

$$\frac{dT_B}{dx} = 0.03(T_S - T_B)$$

$$\frac{dT_S}{dx} = 0.04(T_S - T_B)$$

Figura 4.7: Intercambiador de calor



Fuente: Autores

Calcule T_B y T_S si el intercambiador de calor tiene una longitud de 3m

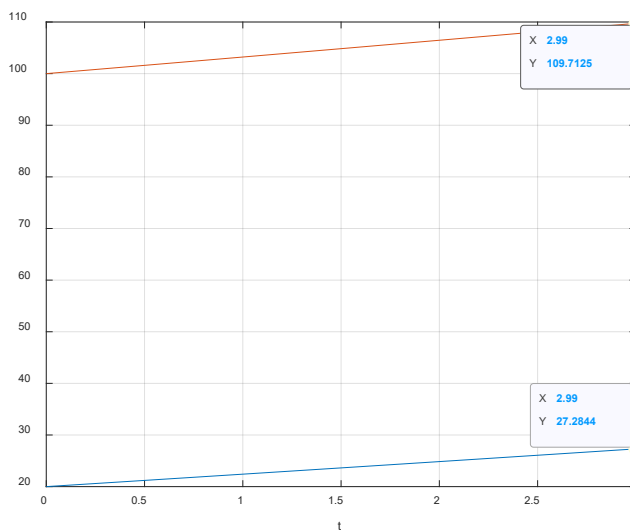
Solución

Escribimos una función que describa el sistema de ecuaciones diferenciales

```
function f= problema6(t,Sistema)
TB=Sistema(1);
TS=Sistema(2);
f=[0.03.*(TS-TB);0.04.*(TS-TB)];
end
```

llamamos al método para encontrar la solución del sistema de ecuaciones diferenciales

Figura 4.8: Representación de la solución del “Problema 6” con ABM2 para sistemas de ecuaciones



Fuente: Autores

Problema 7

Un sistema resonante de muelles sobre el que se ejerce una fuerza externa periódica se modela mediante la ecuación:

$$x''(t) = 4\sin(5t) - 25x(t), x(0) = x'(0) = 0$$

- a) Transforma el PVI en un sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden. Escribe una función que implemente el sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden y copia el código en este apartado.

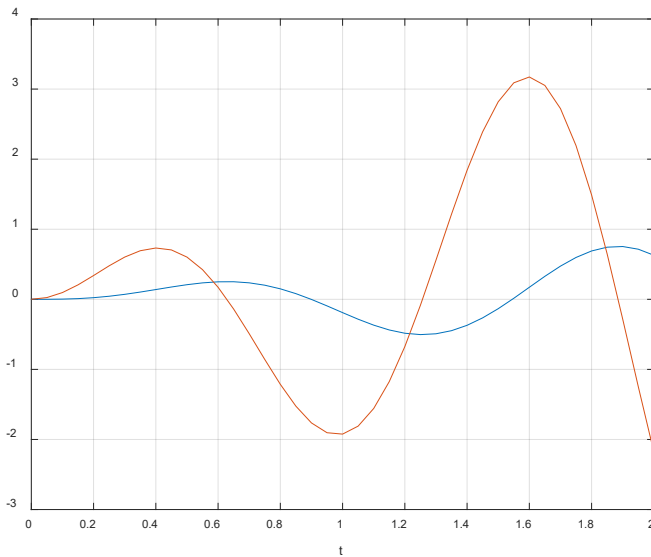
$$\begin{aligned} x &= z_1 \\ x' &= z_1' = z_2 \\ x'' &= z_1'' = z_2' \\ x''(t) &= 4 \sin(5t) - 25x(t) \rightarrow z_2' = 4\sin(5t) - 25z_1(t) \end{aligned}$$

```
function f=problema7(t,z)
    f=[z(2);4.*sin(5.*t)-25.*z(1)];
end
```

- b) Usa el método de ABM2 para resolver el PVI en el intervalo $[0,2]$ con 40 subintervalos. Representa la solución $x(t)$ para $t \in [0,2]$. Indica en una tabla los valores de $x(t)$ para $t = \{0, 0.25, 0.5, 0.75, 1, 1.25, 1.5, 1.75, 2\}$

```
>> [x,y] = ABM4_Sis('problema7',0,2,40,[0 0]);
>> plot(x,y),grid on,xlabel('t')
```

Figura 4.9: Representación de la solución del “Problema 7” con ABM2 para sistemas de ecuaciones



Fuente: Autores

Para encontrar los valores los valores para $t = \{0, 0.25, 0.5, 0.75, 1, 1.25, 1.5, 1.75, 2\}$

encontramos las posiciones

$$\frac{b - a}{N+1} \quad \text{Posicion} - a \quad x$$

$\bullet 0$ $\frac{2 - 0}{41} = 0$ $0 \quad x$	$\bullet 0.25$ $\frac{2 - 0}{41} = 5.125 \rightarrow 6$ $0.25 \quad x$	$\bullet 0.5$ $\frac{2 - 0}{41} = 10.25 \rightarrow 11$ $0.5 \quad x$
$\bullet 0.75$ $\frac{2 - 0}{41} = 15.375 \rightarrow 16$ $0.75 \quad x$	$\bullet 1$ $\frac{2 - 0}{41} = 20.5 \rightarrow 21$ $1 \quad x$	$\bullet 1.25$ $\frac{2 - 0}{41} = 25.625 \rightarrow 26$ $1.25 \quad x$
$\bullet 1.5$ $\frac{2 - 0}{41} = 30.75 \rightarrow 31$ $1.5 \quad x$	$\bullet 1.75$ $\frac{2 - 0}{41} = 35.875 \rightarrow 36$ $1.75 \quad x$	$\bullet 2$ $\frac{2 - 0}{41} = 41$ $2 \quad x$

```
>> [x,y] = ABM4_Sis('problema7',0,2,40,[0 0]);
>> X=[x(1) x(6) x(11) x(16) x(21) x(26) x(31) x(36) x(41)]
X =
    0    0.2500    0.5000    0.7500    1.0000    1.2500    1.5000    1.7500    2.000
>> Y=[y(1) y(6) y(11) y(16) y(21) y(26) y(31) y(36) y(41)]
Y =
    0    0.0438    0.2086    0.2015   -0.1900   -0.5035   -0.1339    0.5973    0.6293
```

Problema 8

Sea el problema de valor inicial:

$$y'''(t) + ty''(t) - ty'(t) - 2y(t) = t, y(0) = y''(0) = 1, y'(0) = 0$$

- a) Transforma el PVI en un sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden. Implemente el sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden y copia el código en este apartado.

$$y'''(t) = t - ty''(t) + ty'(t) + 2y(t)$$

$$y = z_1$$

$$y' = z_1' = z_2$$

$$y'' = z_1'' = z_2' = z_3$$

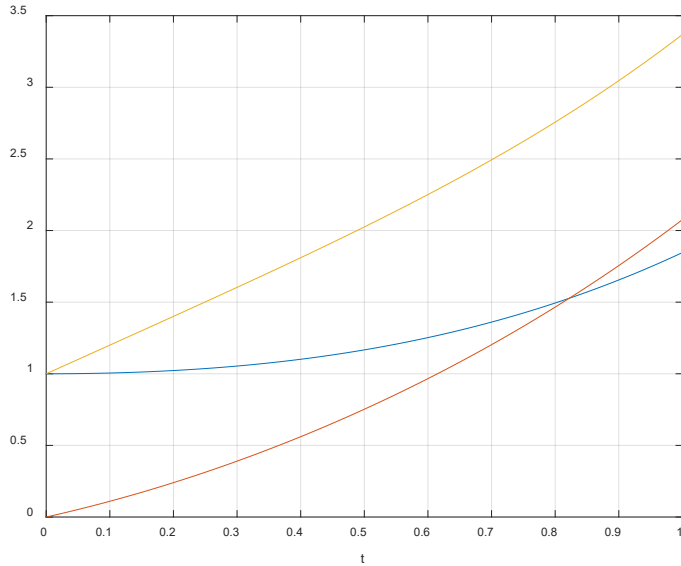
$$y''' = z_1''' = z_2'' = z_3'$$

$$y'''(t) = t - ty''(t) + ty'(t) + 2y(t) \rightarrow z_3' = t - tz_3 + tz_2 + 2z_1$$

- b) Usa el método de ABM para aproximar su solución en el intervalo [0,1] utilizando 80 subintervalos. Representa los valores de $y'(t)$

```
>> [x,y] = ABM4_Sis('problema8',0,1,80,[1 0 1]);
>> plot(x,y),grid on,xlabel('t')
```

Figura 4.10: Representación de la solución del “Problema 8” con ABM4 para sistemas de ecuaciones



Fuente: Autores

c) Indica en una tabla los valores de $y(t)$ para $t = \{0, 0.2, 0.5, 0.8, 1\}$

$b - a$		$N+1$
Posicion - a		x
<ul style="list-style-type: none"> • 0 1 81 0 $x = 1$ 	<ul style="list-style-type: none"> • 0.2 1 81 0.2 $x = 16.2 \rightarrow 17$ 	<ul style="list-style-type: none"> • 0.5 1 81 0.5 $x = 40.5 \rightarrow 41$
<ul style="list-style-type: none"> • 0.8 1 81 0.8 $x = 64.8 \rightarrow 65$ 	<ul style="list-style-type: none"> • 1 1 81 1 $x = 81$ 	

```
>> [x,y] = ABM4_Sis('problema8',0,1,80,[1 0 1]);
>> X=[x(1) x(17) x(41) x(65) x(81)]
X =
    0    0.2000    0.5000    0.8000    1.0000
>> Y=[y(1) y(17) y(41) y(65) y(81)]
Y =
    1.0000    1.0226    1.1668    1.4940    1.8461
```

d) Proporciona una estimación numérica del orden del método de ABM

```
>> [x,y1]=ABM4_Sis('problema8',0,1,80*1,[1 0 1]);sol1=y1(:,1);
>> [x,y2]=ABM4_Sis('problema8',0,1,80*2,[1 0 1]);sol2=y2(:,1);
>> [x,y3]=ABM4_Sis('problema8',0,1,80*4,[1 0 1]);sol3=y3(:,1);
>> [x,y4]=ABM4_Sis('problema8',0,1,80*8,[1 0 1]);sol4=y4(:,1);
>> [x,y5]=ABM4_Sis('problema8',0,1,80*16,[1 0 1]);sol5=y5(:,1);
>> [x,y6]=ABM4_Sis('problema8',0,1,80*32,[1 0 1]);sol6=y6(:,1);
>> [x,y7]=ABM4_Sis('problema8',0,1,80*64,[1 0 1]);sol7=y7(:,1);
>> e1=abs(sol1-sol2(1:2:end)); e2=abs(sol2-sol3(1:2:end));
>> e3=abs(sol3-sol4(1:2:end)); e4=abs(sol4-sol5(1:2:end));
>> e5=abs(sol5-sol6(1:2:end)); e6=abs(sol6-sol7(1:2:end));
>> relacion=[max(e1)/max(e2) max(e2)/max(e3) max(e3)/max(e4) max(e4)/
max(e5) max(e5)/max(e6) ]'
relacion =
    3.9783
    3.9890
    3.9945
    3.9972
    3.9986
```

Podemos observar se aproxima el orden

Problema 9

En un cierto hábitat conviven conejos y linces, cuyas poblaciones en un cierto instante t denotaremos por $c(t)$ e $l(t)$, respectivamente. El modelo establece que la relación entre ambas poblaciones como:

$$c'(t) = 2.01c(t) - 0.02c(t)l(t)$$

$$l'(t) = 0.0001c(t)l(t) - 0.8l(t)$$

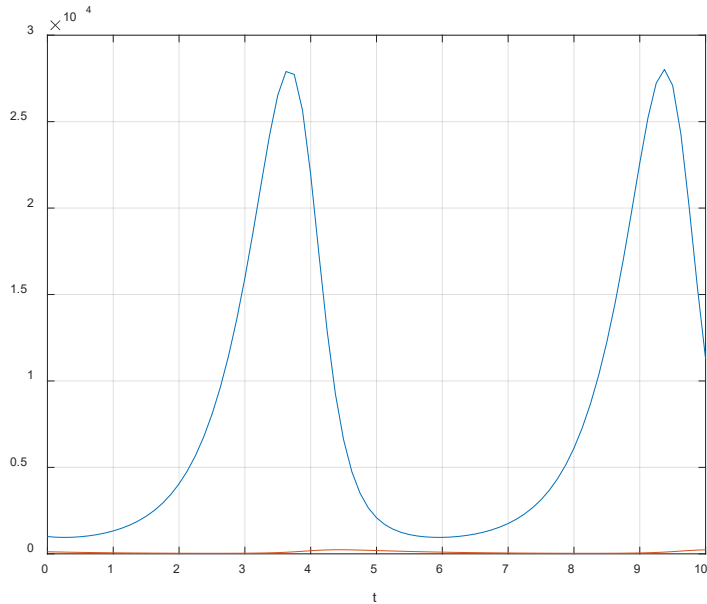
a) Escribe una función que implemente el sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden y copia el código en este apartado.

```
function f= problema9(t,Sistema)
c=Sistema(1);
l=Sistema(2);
f=[2.01.*c-0.02.*c.*l;0.0001.*c.*l-0.8.*l];
end
```

b) Resolver el sistema en el intervalo $[0,10]$ con 80 subintervalos partiendo de $c(0) = 1000$ conejos y $l(0) = 120$ lincees.

```
>> [x,y] = ABM4_Sis('problema9',0,10,80,[1000 120]);
>> plot(x,y),grid on,xlabel('t')
```

Figura 4.11: Representación de la solución del “Problema 9” con ABM4 para sistemas de ecuaciones



Fuente: Autores

c) Indica en una tabla los valores de $c(t)$ y $l(t)$ para $t = \{0,2,4,6,8,10\}$ para 80 subintervalos.

		$b - a$	$N+1$
		Posicion - a	x
• 0	• 2	• 4	
10 81	10 81	10 81	
0 x = 1	2 x = 16.2 → 17	4 x = 32.4 → 33	
• 6	• 8	• 10	
10 81	10 81	10 81	
6 x = 48.6 → 49	8 x = 64.8 → 65	10 x = 81	

```
>> [x,y] = ABM4_Sis('problema9',0,10,80,[1000 120]);
>> X=[x(1) x(17) x(33) x(49) x(65) x(81)]
X =
    0    2    4    6    8   10
>> Y=[y(1) y(17) y(33) y(49) y(65) y(81)]
Y =
 1.0e+04 *
 0.1000  0.4048  2.1938  0.0952  0.6112  1.1275
```

Problema 10

El modelo de Lorenz-Haken para un láser de dos niveles viene dado por el sistema de ecuaciones diferenciales:

$$\begin{aligned} F'(t) &= 3(P(t) - F(t)) \\ P'(t) &= -P(t) + d(t) \cdot F(t) \\ d'(t) &= 17 - d(t) - F(t) \cdot P(t) \end{aligned}$$

donde $F(t)$ es el campo, $P(t)$ la polarización y $d(t)$ la diferencia de polarizaciones.

- a) Escribe una función que implemente el sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden y copia el código en este apartado.

```
function f= problema10(t,Sistema)
F=Sistema(1);
P=Sistema(2);
d=Sistema(3);
f=[3.*(P-F);-P+d.*F;17-d-F.*P];
end
```

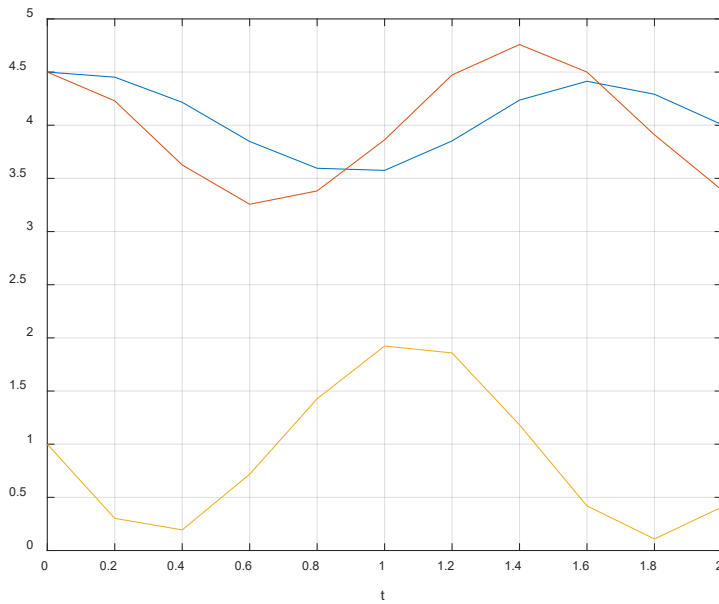
- b) Resuelve el sistema en el intervalo temporal $t \in [0,2]$ tomando como paso $h = 0.2$ y como condiciones iniciales $F(0) = P(0) = 4.5$, $d(0) = 1$.

Calculamos el valor de N . Partiendo de $h = \frac{b-a}{N}$ y despejando se obtiene $N = \frac{b-a}{h}$

Donde $N = (2-0)/0.2$ obteniendo el número de iteraciones $N = 10$

```
>> [x,y] = ABM4_Sis('problema10',0,2,10,[4.5 4.5 1]);
>> plot(x,y),grid on,xlabel('t')
```

Figura 4.12: Representación de la solución del “Problema 10” con ABM4 para sistemas de ecuaciones



Fuente: Autores

c) Indica en una tabla los valores de F , P y d para $t = \{0, 0.6, 1, 1.8, 2\}$.

$$\text{Posicion} - a \quad \begin{matrix} b - a \\ N+1 \\ x \end{matrix}$$

<ul style="list-style-type: none"> • 0 2 11 0 x = 1 	<ul style="list-style-type: none"> • 0.6 2 11 0.6 x = 3.3 → 4 	<ul style="list-style-type: none"> • 1 2 11 1 x = 5.5 → 6
<ul style="list-style-type: none"> • 1.8 2 11 1.8 x = 9.9 → 10 	<ul style="list-style-type: none"> • 2 2 11 2 x = 11 	

```
>> [x,y] = ABM4_Sis('problema10',0,2,10,[4.5 4.5 1]);
```

```
>> X=[x(1) x(4) x(6) x(10) x(11)]
```

```
X =
```

```
0 0.6000 1.0000 1.8000 2.0000
```

```
>> Y=[y(1) y(4) y(6) y(10) y(11)]
Y =
    4.5000    3.8473    3.5755    4.2915    4.0059
```

Problema 11

Sea el Siguiete problema de valor inicial:

$$y''(x) + y(x) + 2\sin(x) = 0, x \in [0, 2\pi]$$

Con las condiciones iniciales

$$y(0)=0, y'(0)=1$$

- a) Transforme el PVI en un sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden y escriba una función que describa el problema

$$y''(x) = -y(x) - 2\sin(x)$$

$$y = z_1$$

$$y' = z_1' = z_2$$

$$y'' = z_1'' = z_2'$$

$$y''(x) = -y(x) - 2\sin(x) \rightarrow z_2' = -z_1 - 2\sin(x)$$

```
function f=problema11(x,z)
```

```
    f=[z(2);-z(1)-2.*sin(x)];
```

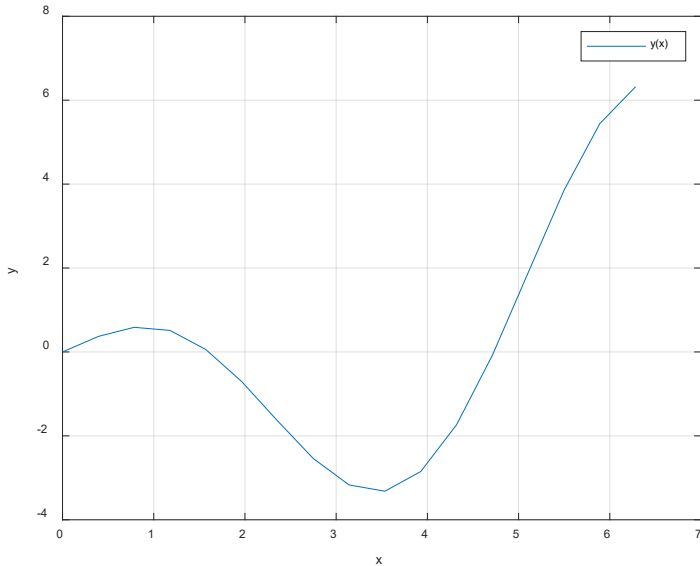
```
end
```

- b) Resuelva el PVI para el intervalo $x \in [0, 2\pi]$ con $h = \pi/8$. Represente $y(x)$. Indica los valores de $y(x)$ para $x = \{0, \pi/2, \pi, 3\pi/2, 2\pi\}$

Calculamos el valor de N . Partiendo de $h = \frac{b-a}{N}$ y despejando se obtiene $N = \frac{b-a}{h}$

Donde $N = (2\pi-0)/(\pi/8)$ obteniendo el número de iteraciones $N = 16$

```
>> [x,y] = ABM4_Sis('problema11',0,2*pi,16,[0 1]);
>> plot(x,y(:,1)),grid on,xlabel('x'),ylabel('y')
>> legend('y(x)')
```

Figura 4.13: Representación $y(x)$ “Problema 11” con ABM4

Fuente: Autores

c) Calcule la estimación del orden de convergencia del método

```
>> [x,y1]=ABM4_Sis('problema11',0,2*pi,80*1,[0 1]);sol1=y1(:,1);
>> [x,y2]=ABM4_Sis('problema11',0,2*pi,80*2,[0 1]);sol2=y2(:,1);
>> [x,y3]=ABM4_Sis('problema11',0,2*pi,80*4,[0 1]);sol3=y3(:,1);
>> [x,y4]=ABM4_Sis('problema11',0,2*pi,80*8,[0 1]);sol4=y4(:,1);
>> [x,y5]=ABM4_Sis('problema11',0,2*pi,80*16,[0 1]);sol5=y5(:,1);
>> [x,y6]=ABM4_Sis('problema11',0,2*pi,80*32,[0 1]);sol6=y6(:,1);
>> [x,y7]=ABM4_Sis('problema11',0,2*pi,80*64,[0 1]);sol7=y7(:,1);
>> e1=abs(sol1-sol2(1:2:end)); e2=abs(sol2-sol3(1:2:end));
>> e3=abs(sol3-sol4(1:2:end)); e4=abs(sol4-sol5(1:2:end));
>> e5=abs(sol5-sol6(1:2:end)); e6=abs(sol6-sol7(1:2:end));
>> relacion=[max(e1)/max(e2) max(e2)/max(e3) max(e3)/max(e4) max(e4)/
max(e5) max(e5)/max(e6) ]'
relacion =
    4.1835
    4.0427
    4.0106
    4.0026
    4.0006
```

Problema 12

Sea $u(r)$ el potencial electrostático entre dos esferas metálicas concéntricas de radios R y $2R$ ($R > 0$). El potencial entre dos esferas viene determinado por la expresión

$$u''(r) + \frac{2}{r}u'(r) = 0, R \in \{R, 2R\}$$

Con las condiciones iniciales $u(r) = V, u'(r) = -2v/R$. Tómesese $R = 10, V = 1$

- a) Transforme el PVI en un sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden y escriba una función que describa el problema

$$u''(r) = -\frac{2}{r}u'(r)$$

$$u = z_1$$

$$u' = z_1' = z_2$$

$$u'' = z_1'' = z_2'$$

$$u''(r) = -\frac{2}{r}u'(r) \rightarrow z_2' = -\frac{2}{r}z_2(r)$$

`function f=problema12(r,z)`

`R=10;`

`f=[z(2);-2./R.*z(2)];`

`end`

- b) Resuelva el PVI para el intervalo $r \in [R, 2R]$ con $h = 1$. Represente $u(r)$.

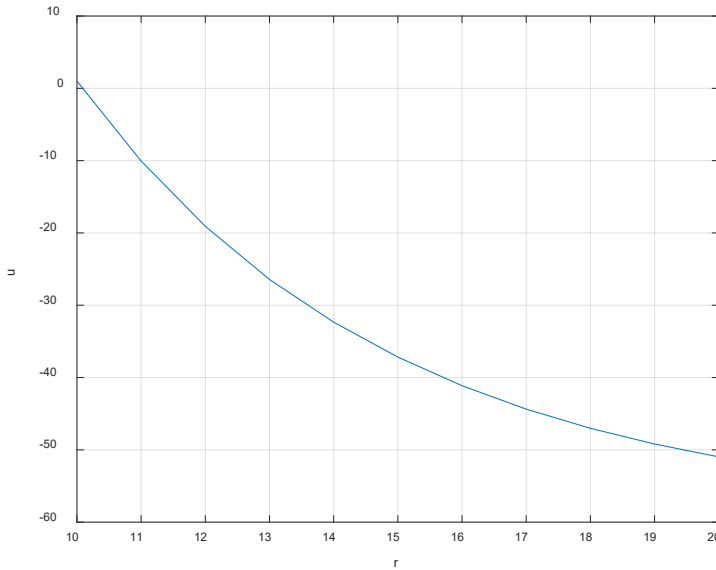
Calculamos el valor de N . Partiendo de $h = \frac{b-a}{N}$ y despejando se obtiene $N = \frac{b-a}{h}$

Donde $N = (20-10)/1$ obteniendo el número de iteraciones $N = 10$

`>> [x,y] = ABM4_Sis('problema12',10,20,10,[1 -12]);`

`>> plot(x,y(:,1)),grid on,xlabel('r'),ylabel('u')`

Figura 4.14: Representación $u(r)$ “Problema 12” con ABM4



Fuente: Autores

c) Indica los valores de $u(r)$ para $r = \{10,15,20\}$

$b - a$ $N+1$
Posición - a x

<p>• 10</p> <table style="margin-left: 20px;"> <tr><td>10</td><td>11</td></tr> <tr><td>0</td><td>x</td></tr> </table> <p style="text-align: right;">= 1</p>	10	11	0	x	<p>• 15</p> <table style="margin-left: 20px;"> <tr><td>10</td><td>11</td></tr> <tr><td>5</td><td>x</td></tr> </table> <p style="text-align: right;">= 5.5 → 6</p>	10	11	5	x	<p>• 20</p> <table style="margin-left: 20px;"> <tr><td>10</td><td>11</td></tr> <tr><td>10</td><td>x</td></tr> </table> <p style="text-align: right;">= 11</p>	10	11	10	x
10	11													
0	x													
10	11													
5	x													
10	11													
10	x													

```
>> [x,y]=ABM4_Sis('problema12',10,20,10,[1 -12]);
```

```
>> X=[x(1) x(6) x(11)]
```

```
X =
```

```
10 15 20
```

```
>> Y=[y(1) y(6) y(11)]
```

```
Y =
```

```
1.0000 -37.1705 -50.9707
```

d) Calcule la estimación del orden de convergencia del método

```
>> [x,y1]=ABM4_Sis('problema12',10,20,10*1,[1 -12]);sol1=y1(:,1);
```

```
>> [x,y2]=ABM4_Sis('problema12',10,20,10*2,[1 -12]);sol2=y2(:,1);
```

```
>> [x,y3]=ABM4_Sis('problema12',10,20,10*4,[1 -12]);sol3=y3(:,1);
```

```
>> [x,y4]=ABM4_Sis('problema12',10,20,10*8,[1 -12]);sol4=y4(:,1);
>> [x,y5]=ABM4_Sis('problema12',10,20,10*16,[1 -12]);sol5=y5(:,1);
>> [x,y6]=ABM4_Sis('problema12',10,20,10*32,[1 -12]);sol6=y6(:,1);
>> [x,y7]=ABM4_Sis('problema12',10,20,10*64,[1 -12]);sol7=y7(:,1);
>> e1=abs(sol1-sol2(1:2:end)); e2=abs(sol2-sol3(1:2:end));
>> e3=abs(sol3-sol4(1:2:end)); e4=abs(sol4-sol5(1:2:end));
>> e5=abs(sol5-sol6(1:2:end)); e6=abs(sol6-sol7(1:2:end));
>> relacion=[max(e1)/max(e2) max(e2)/max(e3) max(e3)/max(e4) max(e4)/
max(e5) max(e5)/max(e6) ]'
relacion =
    3.1437
    3.5462
    3.7661
    3.8813
    3.9402
```

Problema 13

Sea el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales

$$\begin{aligned}x' &= y \\ y' &= -x - 2e^t + 1 \\ z' &= -x - e^t + 1\end{aligned}$$

Siendo $x(0) = 1, y(0) = 0, z(0) = 1$

- a) El PVI $t \in [0,2]$, tomando como paso $h = 0.1$. represente la evolución de $x(t), y(t), z(t)$

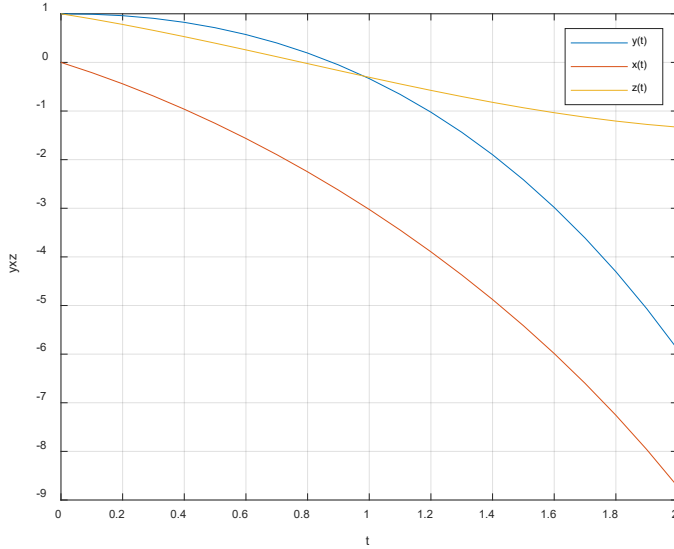
```
function f= problema13(t,Sistema)
x=Sistema(1);
y=Sistema(2);
z=Sistema(3);
f=[y;-x-2.*exp(t)+1;-x-exp(t)+1];
end
```

Calculamos el valor de N . Partiendo de $h = \frac{b-a}{N}$ y despejando se obtiene $N = \frac{b-a}{h}$

Donde $N = (2-0)/0.1$ obteniendo el número de iteraciones $N = 20$

```
>> [x,y] = ABM4_Sis('problema13',0,2,20,[1 0 1]);
>> plot(x,y),grid on,xlabel('t'), ylabel('xyz')
>> legend('y(t)', 'x(t)', 'z(t)')
```

Figura 4.15: Representación de la evolución de $x(t),y(t),z(t)$



Fuente: Autores

b) Indica los valores para $t = \{0.2,1,1.5,2\}$

$b - a$ $N+1$
Posición - a x

<p>• 0.2</p> <p style="text-align: center;">2 21</p> <p style="text-align: center;">= 2.1 → 3</p> <p>0.2 x</p>	<p>• 1</p> <p style="text-align: center;">2 21</p> <p style="text-align: center;">= 10.5 → 11</p> <p>1 x</p>	<p>• 1.5</p> <p style="text-align: center;">2 21</p> <p style="text-align: center;">= 15.75 → 16</p> <p>1.5 x</p>
<p>• 2</p> <p style="text-align: center;">2 21</p> <p style="text-align: center;">= 21</p> <p>2 x</p>		

```
>> [x,y] = ABM4_Sis('problema13',0,2,20,[1 0 1]);
>> X=[x(3) x(11) x(16) x(21)]
X =
    0.2000    1.0000    1.5000    2.0000
>> Y=[y(3) y(11) y(16) y(21)]
```

Y =

0.9610 -0.3331 -2.4127 -5.8980

c) Calcule la estimación del orden de convergencia del método

```
>> [x,y1]=ABM4_Sis('problema13',0,2,20*1,[1 0 1]);sol1=y1(:,1);
>> [x,y2]=ABM4_Sis('problema13',0,2,20*2,[1 0 1]);sol2=y2(:,1);
>> [x,y3]=ABM4_Sis('problema13',0,2,20*4,[1 0 1]);sol3=y3(:,1);
>> [x,y4]=ABM4_Sis('problema13',0,2,20*8,[1 0 1]);sol4=y4(:,1);
>> [x,y5]=ABM4_Sis('problema13',0,2,20*16,[1 0 1]);sol5=y5(:,1);
>> [x,y6]=ABM4_Sis('problema13',0,2,20*32,[1 0 1]);sol6=y6(:,1);
>> [x,y7]=ABM4_Sis('problema13',0,2,20*64,[1 0 1]);sol7=y7(:,1);
>> e1=abs(sol1-sol2(1:2:end)); e2=abs(sol2-sol3(1:2:end));
>> e3=abs(sol3-sol4(1:2:end)); e4=abs(sol4-sol5(1:2:end));
>> e5=abs(sol5-sol6(1:2:end)); e6=abs(sol6-sol7(1:2:end));
>> relacion=[max(e1)/max(e2) max(e2)/max(e3) max(e3)/max(e4) max(e4)/
max(e5) max(e5)/max(e6) ]'
relacion =
    4.2886
    4.1593
    4.0835
    4.0428
    4.0216
```

Problema 14

Sea el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales:

$$\begin{aligned}x' &= y - z + t \\y' &= 3t^2 \\z' &= y + e^{-t}\end{aligned}$$

Siendo $x(0) = 1$, $y(0) = 1$, $z(0) = -1$

a) Resuelva el PVI con $t \in [0,1]$, tomando pasos de $h = 0.05$. Represente $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$

```
function f= problema14(t,Sistema)
x=Sistema(1);
y=Sistema(2);
```

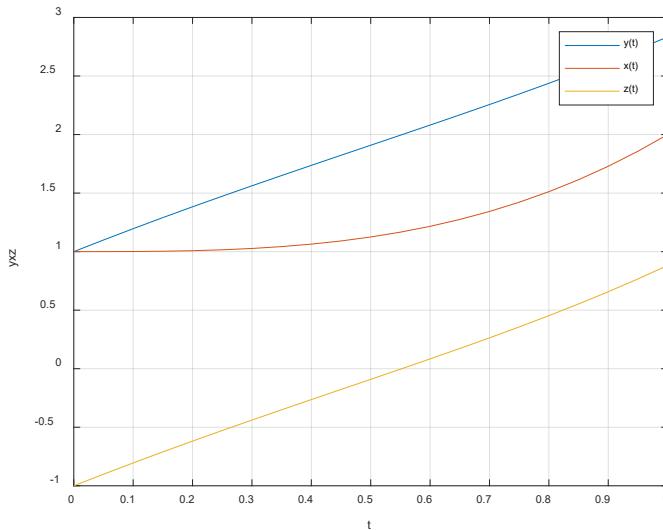
```
z=Sistema(3);
f=[y-z+t;3.*t.^2;y+exp(-t)];
end
```

Calculamos el valor de N . Partiendo de $h = \frac{b-a}{N}$ y despejando se obtiene $N = \frac{b-a}{h}$

Donde $N = (1-0)/0.05$ obteniendo el número de iteraciones $N = 20$

```
>> [x,y] = ABM4_Sis('problema14',0,1,20,[1 1 -1]);
>> plot(x,y),grid on,xlabel('t'), ylabel('xyz')
>> legend('y(t)','x(t)','z(t)')
```

Figura 4.16: Representación de $x(t),y(t),z(t)$



Fuente: Autores

b) Indica los valores para $t = \{0.1,0.5,0.75,1\}$

$$\begin{matrix} b - a & N+1 \\ \text{Posicion - } a & x \end{matrix}$$

<ul style="list-style-type: none"> • 0.1 1 21 $= 2.1 \rightarrow 3$ 0.1 x 	<ul style="list-style-type: none"> • 0.5 1 21 $= 10.5 \rightarrow 11$ 0.5 x 	<ul style="list-style-type: none"> • 0.75 1 21 $= 15.75 \rightarrow 16$ 0.75 x
<ul style="list-style-type: none"> • 2 1 21 $= 21$ 1 x 		

```
>> [x,y] = ABM4_Sis('problema14',0,1,20,[1 1 -1]);
>> plot(x,y),grid on,xlabel('t'), ylabel('yxz')
>> legend('y(t)', 'x(t)', 'z(t)')
>> X=[x(3) x(11) x(16) x(21)]
X =
    0.1000    0.5000    0.7500    1.0000
>> Y=[y(3) y(11) y(16) y(21)]
Y =
    1.1960    1.9087    2.3461    2.8333
```

c) Calcule la estimación del orden de convergencia del método

```
>> [x,y] = ABM4_Sis('problema14',0,1,20,[1 1 -1]);
>> [x,y1]=ABM4_Sis('problema14',0,1,20*1,[1 1 -1]);sol1=y1(:,1);
>> [x,y2]=ABM4_Sis('problema14',0,1,20*2,[1 1 -1]);sol2=y2(:,1);
>> [x,y3]=ABM4_Sis('problema14',0,1,20*4,[1 1 -1]);sol3=y3(:,1);
>> [x,y4]=ABM4_Sis('problema14',0,1,20*8,[1 1 -1]);sol4=y4(:,1);
>> [x,y5]=ABM4_Sis('problema14',0,1,20*16,[1 1 -1]);sol5=y5(:,1);
>> [x,y6]=ABM4_Sis('problema14',0,1,20*32,[1 1 -1]);sol6=y6(:,1);
>> [x,y7]=ABM4_Sis('problema14',0,1,20*64,[1 1 -1]);sol7=y7(:,1);
>> e1=abs(sol1-sol2(1:2:end)); e2=abs(sol2-sol3(1:2:end));
>> e3=abs(sol3-sol4(1:2:end)); e4=abs(sol4-sol5(1:2:end));
>> e5=abs(sol5-sol6(1:2:end)); e6=abs(sol6-sol7(1:2:end));
>> relacion=[max(e1)/max(e2) max(e2)/max(e3) max(e3)/max(e4) max(e4)/
max(e5) max(e5)/max(e6) ]'
relacion =
    3.9105
    3.9563
    3.9782
    3.9891
    3.9945
```

Problema 15

Sea el siguiente problema de valor inicial

$$y''(x) = \frac{y(x)(9x - 15)}{x - 1}, \quad x \in [0, \frac{1}{2}]$$

Con las condiciones iniciales $y(0) = 1, y'(0) = 4$

- a) Transforme en un sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden y escriba la función del PVI del sistema de ecuaciones encontrado.

$$y''(x) = \frac{y(x)(9x - 15)}{x - 1}$$

$$y = z_1$$

$$y' = z_1' = z_2$$

$$y'' = z_1'' = z_2'$$

$$y''(x) = \frac{y(x)(9x - 15)}{x - 1} \rightarrow z_2' = \frac{z_1(9x - 15)}{x - 1}$$

```
function f=problema15(x,z)
    f=[z(2);(z(1).*(9.*x-15))./(x-1)];
end
```

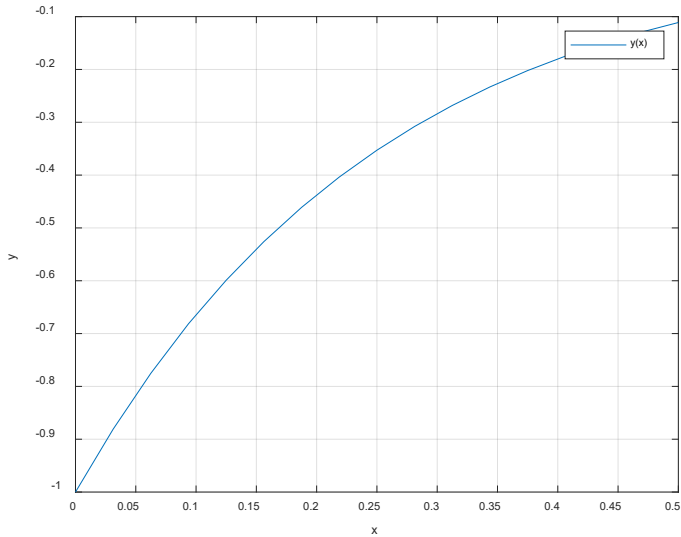
- b) Resuelva el PVI en el intervalo con y represente

Calculamos el valor de N . Partiendo de $h = \frac{b-a}{N}$ y despejando se obtiene $N = \frac{b-a}{h}$

Donde $N = (0.5-0)/0.03125$ obteniendo el número de iteraciones $N = 16$

```
>> [x,y] = ABM4_Sis('problema15',0,1/2,16,[-1 4]);
>> plot(x,y(:,1)),grid on,xlabel('x'), ylabel('y')
>> legend('y(x)')
```

Figura 4.17: Representación de “Problema 15”, $y(t)$,



Fuente: Autores

c) Indica los valores para $t = \{0, 3/16, 1/4, 3/8, 1/2\}$

$b - a$ $N+1$
Posicion - a x

<ul style="list-style-type: none"> • 0 0.5 17 0 $x = 1$ 	<ul style="list-style-type: none"> • 3/16 0.5 17 3/16 $x = 6.37 \rightarrow 7$ 	<ul style="list-style-type: none"> • 1/4 0.5 17 1/4 $x = 8.5 \rightarrow 9$
<ul style="list-style-type: none"> • 3/8 0.5 17 3/8 $x = 12.75 \rightarrow 13$ 	<ul style="list-style-type: none"> • 1/2 0.5 17 1/2 $x = 17$ 	

>> X=[x(1) x(7) x(9) x(13) x(17)]

X =

0 0.1875 0.2500 0.3750 0.5000

>> X=[y(1) y(7) y(9) y(13) y(17)]

X =

-1.0000 -0.4611 -0.3529 -0.2021 -0.1111

d) Calcule la estimación del orden de convergencia del método

```
>> [x,y1]=ABM4_Sis('problema15',0,1/2,16*1,[-1 4]);sol1=y1(:,1);
>> [x,y2]=ABM4_Sis('problema15',0,1/2,16*2,[-1 4]);sol2=y2(:,1);
>> [x,y3]=ABM4_Sis('problema15',0,1/2,16*4,[-1 4]);sol3=y3(:,1);
>> [x,y4]=ABM4_Sis('problema15',0,1/2,16*8,[-1 4]);sol4=y4(:,1);
>> [x,y5]=ABM4_Sis('problema15',0,1/2,16*16,[-1 4]);sol5=y5(:,1);
>> [x,y6]=ABM4_Sis('problema15',0,1/2,16*32,[-1 4]);sol6=y6(:,1);
>> [x,y7]=ABM4_Sis('problema15',0,1/2,16*64,[-1 4]);sol7=y7(:,1);
>> e1=abs(sol1-sol2(1:2:end)); e2=abs(sol2-sol3(1:2:end));
>> e3=abs(sol3-sol4(1:2:end)); e4=abs(sol4-sol5(1:2:end));
>> e5=abs(sol5-sol6(1:2:end)); e6=abs(sol6-sol7(1:2:end));
>> relacion=[max(e1)/max(e2) max(e2)/max(e3) max(e3)/max(e4) max(e4)/
max(e5) max(e5)/max(e6) ]'
relacion =
    3.4717
    3.7284
    3.8622
    3.9306
    3.9652
```

Problema 16

Dos masas $m_1 = m_2 = 1$ sujetas a resortes (sin masa) con constantes $k_1=6$ y $k_2=4$ en la cual el desplazamiento esta dado por las ecuaciones:

$$y_1''(t) = \frac{-k_1 y_1}{m_1} + \frac{k_2 (y_2 - y_1)}{m_2}$$

$$y_2''(t) = -\frac{k_2 (y_2 - y_1)}{m_2}$$

Asuma que las masas parten del equilibrio con velocidades unitarias y en direcciones opuestas esto indica que las condiciones iniciales son: $y_1(0) = 0$, $y_1'(0) = 1$, $y_2(0) = 0$, $y_2'(0) = -1$

- a) Escriba una función que describa un sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden.

$$y_1 = z_1$$

$$y_1' = z_1' = z_2$$

$$y_1'' = z_1'' = z_2'$$

$$y_1''(t) = \frac{-k_1 y_1}{m_1} + \frac{k_2 (y_2 - y_1)}{m_2} \rightarrow z_2' = -k_1 z_1 + k_2 (z_3 - z_1)$$

$$y_2 = z_3$$

$$y_2' = z_3' = z_4$$

$$y_2'' = z_3'' = z_4'$$

$$y_2''(t) = -\frac{k_2 (y_2 - y_1)}{m_2} \rightarrow z_4' = -k_2 (z_3 - z_1)$$

`function f=problema16(t,z)`

`k1=6;`

`k2=4;`

`f=[z(2);-k1.*z(1)+k2.*(z(3)-z(1));z(4);-k2.*(z(3)-z(1))];`

`end`

- b) Representa gráficamente la solución obtenida con $N=200$ para el intervalo , se observa las oscilaciones del resorte

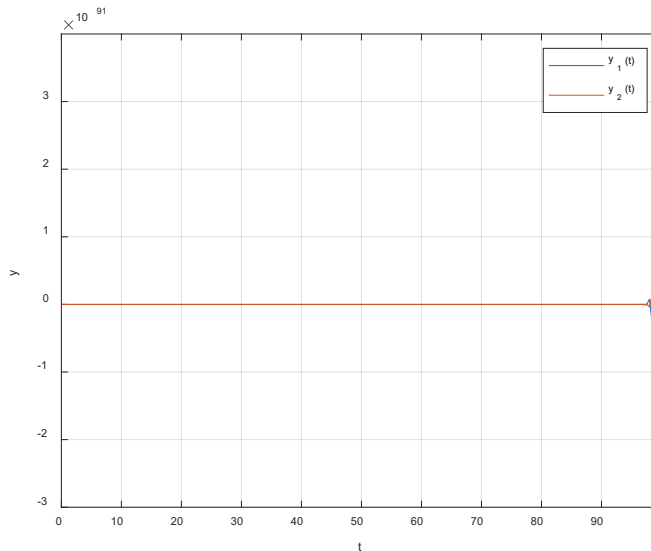
`>> [x,y]=ABM4_Sis('problema16',0,100,200,[0 1 0 -1]);`

`>> plot(x,y(:,1)),grid on,xlabel('t'), ylabel('y')`

`>> hold on`

`>> plot(x,y(:,3))`

`>> legend('y_1(t)', 'y_2(t)')`

Figura 4.18: Representación de $y_1(t)$ y $y_2(t)$ 

Fuente: Autores

Problema 17

Dado que

$$\frac{dy}{dt} = 30(\cos t - y) + 3\sin t$$

Si $y(0) = 1$ emplee el método predictivo para obtener la solución de $t = 0$ a 4 con tamaño de pasos de 0.4

Solución

Escribimos la función en *Matlab*

```
function f= problema17(t,y)
    f=(30.*(cos(t)-y))+3.*sin(t);
end
```

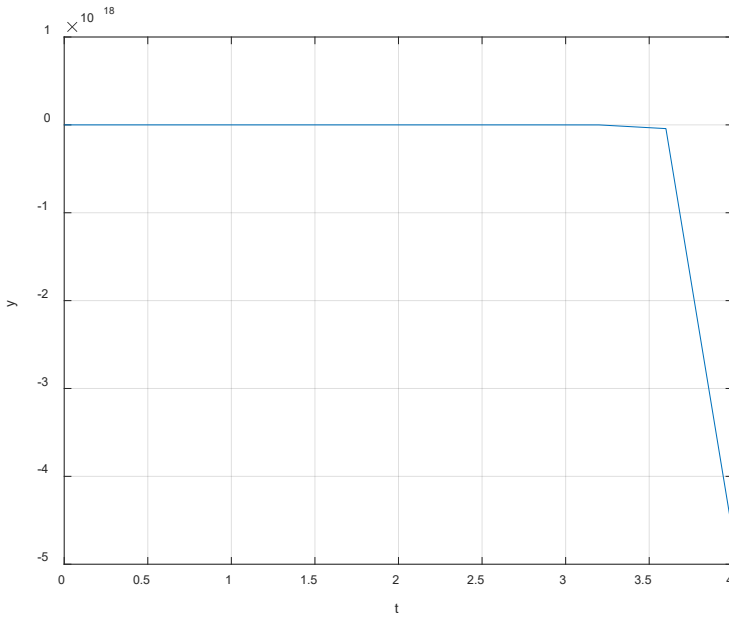
Calculamos el valor de N . Partiendo de $h = \frac{b-a}{N}$ y despejando se obtiene $N = \frac{b-a}{h}$

Donde $N = (4-0)/0.4$ obteniendo el número de iteraciones $N = 10$

Procedemos a llamar al método para encontrar la solución

```
>> [x,y]=ABM4('problema17',0,4,1,10);  
>> plot(x,y),grid on,xlabel('t'), ylabel('y')
```

Figura 4.19: Representación de “Problema 17”, $y(t)$



Fuente: Autores

Problema 18

Resuelva la siguiente ecuación mediante el método de ABM2 con $h = 0.1$

$$y' = -y^{1.5} + 1, y(0) = 10$$

Con $0 \leq t \leq 1$. Imprima los resultados hasta $t = 1$

Solución

Escribimos la función en *Matlab*

```
function f = problema18(t,y)  
    f = (-y.^1.5+1);  
end
```

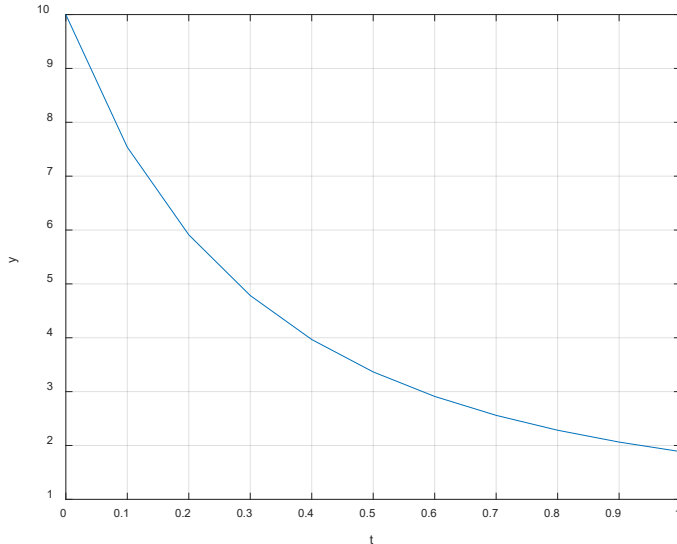
Calculamos el valor de N . Partiendo de $h = \frac{b-a}{N}$ y despejando se obtiene $N = \frac{b-a}{h}$

Donde $N = (1-0)/0.1$ obteniendo el número de iteraciones $N = 10$

Procedemos a llamar al método y graficamos la solución

```
>> [x,y]=ABM4('problema18',0,1,10,10);
>> plot(x,y),grid on,xlabel('t'), ylabel('y')
```

Figura 4.20: Representación de la solución “Problema 18”, $y(t)$



Fuente: Autores

Imprimimos los resultados para

```
>> [x,y]=ABM4('problema18',0,1,10,10)
x =
0 0.1000 0.2000 0.3000 0.4000 0.5000 0.6000 0.7000 0.8000 0.9000 1.000
y =
10.0000 7.5376 5.9112 4.7842 3.9673 3.3658 2.9110 2.5595 2.283 2.0636 1.8865
```

Problema 19

Sea el siguiente problema de valor inicial:

$$G'(t) = -G(0.0309 + X) + 2.2866$$

$$X'(t) = -0.1817X + 2.96(I - 28.4)$$

$$I'(t) = -0.072(I - 29.4)$$

Con las condiciones iniciales $G(0) = 208$, $X(0) = 0$, $I(0) = 32$

Donde $G(t)$ representa la glucosa; $X(t)$ es una función auxiliar e $I(t)$ es la concentración de la insulina de la sangre:

a) Escriba una función que describa un sistema de ecuaciones

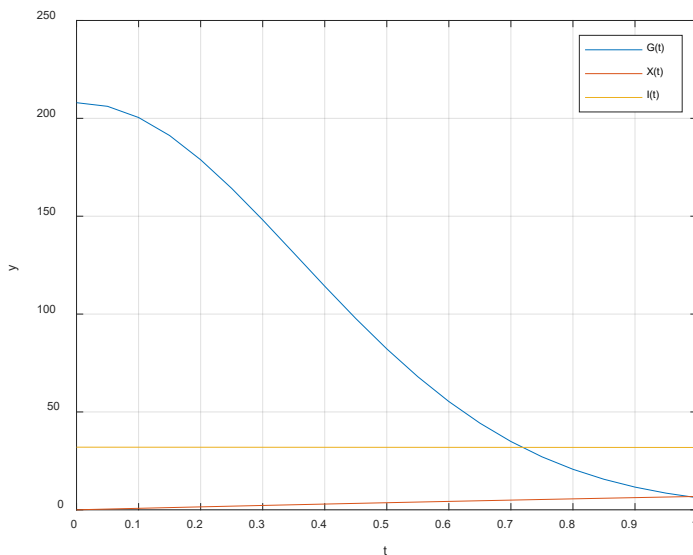
```
function f= problema19(t,Sistema)
G=Sistema(1);
X=Sistema(2);
I=Sistema(3);
f=[-G.*(0.0309+X)+2.2866;-0.1817.*X+2.96.*(I-29.4);-0.072.*(I-29.9)];
end
```

b) Resuelva para el intervalo con paso y represente

Calculamos el valor de N . Partiendo de $h = \frac{b-a}{N}$ y despejando se obtiene $N = \frac{b-a}{h}$

Donde $N = (1-0)/0.05$ obteniendo el número de iteraciones $N = 20$

Figura 4.21: Representación de la solución $G(t)$, $X(t)$, $I(t)$



Fuente: Autores

4.3 EJERCICIOS PROPUESTOS

Ejercicio 1

Un péndulo de Foucault proporciona la demostración empírica de la rotación terrestre: el plano de la oscilación del péndulo gira con el tiempo de manera que tras un cierto periodo que depende de la latitud del observador, vuelve a su posición original.

Las ecuaciones de movimiento son:

$$x'' - 2\omega \sin(\phi) y' + k^2 x = 0$$

$$y'' + 2\omega \sin(\phi) x' + k^2 y = 0$$

Donde ω es la velocidad angular de la rotación terrestre, $\phi = 40^\circ$ es la latitud del observador y la constante k depende de la aceleración de la gravedad g y la longitud del péndulo $l=10$ de manera que $k^2=g/l$. Para iniciar el movimiento se sitúa el péndulo en la posición $x = -6$, $y = 1$ y se deja en movimiento libre, sin impulso inicial.

- Transformar el sistema de ecuaciones de segundo orden en un sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden.
- Calcula la posición del péndulo en el instante $t = 3600$ s con un paso temporal de 0.5 segundos y representa en una misma gráfica las variables $x(t)$ y $y(t)$. Utilice Adams- Bashforth-Moulton ABM4
- Gráfica y Observa el giro del plano de oscilación.
- Representa las curvas $x(t)$ y $x'(t)$
- ¿Qué ocurre si el paso temporal es de un segundo?, Y si es de 0.1s

Ejercicio 2

Sea $u(r)$ el potencial electrostático entre dos esferas metálicas concéntricas de radio R_1 y R_2 , tales que el potencial en la esfera interior se mantiene constante a potencial V_1 y el potencial en la superficie de la esfera exterior es V_2 .

El potencial en ambas esferas se describe por:

$$u''(r) + \frac{2}{r} \times u' \quad r \in [R_1 \quad R_2]$$

Con las condiciones iniciales: $u(R1) = V1$, $u'(R1) = -V1$ supongamos que $R = 2$, $V1 = 1$ voltios y $V2 = 0$ voltios.

- Transforma el PVI en un sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden.
- Escribe una función que describa la ecuación diferencial de segundo orden como un sistema de ecuaciones diferencial de primer orden.
- Resuelve el PVI para el intervalo $r \in [2 \ 2R]$ con pasos $h = 0.05$ y represente $u(r)$. Utilice Adams- Bashforth-Moulton ABM4
- Indica los valores de $u(r)$ para $r = \{2 \ 3 \ 4\}$
- Indica una estimación del orden de convergencia. Posee un orden de convergencia 4

Ejercicio 3

Sea el siguiente problema de valor inicial:

$$y'''(x) = -6y^4 \quad x \in [1 \ 1.9]$$

Con las condiciones iniciales $y(1) = -1$ $y'(1) = -1$ $y''(1) = -2$

- Transforma el PVI en un sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden
- Escribe una función que describa la ecuación diferencial de tercer orden como un sistema de ecuaciones diferencial de primer orden.
- Indica los valores de $y(x)$ para $x \in \{1 \ 1.4 \ 1.9\}$. Utilice Adams- Bashforth-Moulton ABM4.
- Si la solución exacta es $y(x) = \frac{1}{x-2}$ comparar gráficamente la solución exacta con la aproximada, además graficar el error cometido y calcula el error máximo.

Ejercicio 4

Sea el siguiente problema de valor inicial

$$y'''(x) = -\frac{36}{y} - \frac{60}{(x-1)^6} + 3(x-1)^5 \quad x \in [0 \ 0.5]$$

Con las condiciones iniciales $y(0) = -1$ $y'(0) = -3$ $y''(0) = -12$

- Transforma el PVI en un sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden
- Escriba una función que describa la ecuación diferencial de tercer orden como un sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden.
- Resuelva el ejercicio con pasos de $h = 0.1$ y represente $y(x)$. Utilice Adams- Bashforth-Moulton ABM4.
- Indica los valores de $y(x)$ para $x \in \{0 \ 0.2 \ 0.5\}$
- Si la solución exacta es $y(x) = \frac{1}{(x-1)^3}$ comparar gráficamente la solución exacta con la aproximada además gráfica el error cometido y calcula el error máximo.

Ejercicio 5

Sea el siguiente problema de valor inicial

$$y'''(x) = -2xy'' - y' - y + xy \quad x \in [1 \ 2]$$

Con las condiciones iniciales $y(1) = -1$ $y'(1) = 0$ $y''(1) = 1$

- Transforma el PVI en un sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden
- Escriba una función que describa la ecuación diferencial de tercer orden como un sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden
- Resuelve el problema con pasos $h = 0.1$ y representa $y(x)$. Utilice Adams- Bashforth-Moulton ABM4.
- Indica los valores de $y(x)$ para $x \in \{1 \ 1.4 \ 2\}$

Ejercicio 6

Sea el siguiente problema de valor inicial

$$y'''(x) = -\frac{2}{x}y'' - 8y + \frac{8}{x}e^{-2x} + 8\log(x) \quad x \in [1 \ 3]$$

Con las condiciones iniciales $y(1) = e^{-2}$ $y'(1) = 1 - 2e^{-2}$ $y''(1) = -1 + 4e^{-2}$

- a) Transforma el PVI en un sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden
- b) Escriba una función que describa la ecuación diferencial de tercer orden como un sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden
- k) Resuelve el PVI para el intervalo $x \in [1 \ 3]$ con paso $h = 0.1$ y representa $y(x)$. Utilize Adams- Bashforth-Moulton ABM4.
- c) Indica los valores de $y(x)$ para $x \in \{1 \ 1.5 \ 2 \ 2.5 \ 3\}$

Ejercicio 7

Sea el siguiente problema de valor inicial

$$y'''(x) = 12y' + y + 1 - x[\cos(2x) + 16\sin(2x)] \quad x \in [0 \ 2]$$

Con las condiciones iniciales $y(0) = -1 \quad y'(0) = 1 \quad y''(0) = 0$

- a) Transforma el PVI en un sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden
- b) Escriba una función que describa la ecuación diferencial de tercer orden como un sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden
- c) Resuelve el PVI para el intervalo $x \in [0 \ 2]$ con paso $h = 0.1$ y representa $y(x)$. Utilize Adams- Bashforth-Moulton ABM4.

Ejercicio 8

Consideremos el problema de valor inicial definido mediante la ecuación:

$$y''(x) = 2y'(x) - 5y(x)$$

Sujeto a las condiciones iniciales:

$$y\left(-\frac{1}{2}\right) = 0, \quad y'\left(-\frac{1}{2}\right) = 2e^{-\frac{1}{2}}$$

- a) Transforma el PVI en un sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden.
- b) Escribe una función que implemente el sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden.
- d) Usa el método de Heun de orden 2 para resolver el PVI en el intervalo $\left[-\frac{1}{2} \ \frac{3}{2}\right]$ con 40 subintervalos. Utilize Adams- Bashforth-Moulton ABM4.

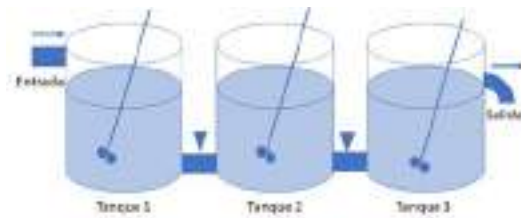
Ejercicio 9

Supongamos una mañana calurosa dentro de una tienda las personas están trabajando con el aire acondicionado, manteniéndose la temperatura de la tienda a 20°C . A medio día se apaga el aire acondicionado y la gente se va a sus casas. La temperatura exterior permanece constante a 35°C . Si la constante de tiempo del edificio es de 4 horas.

- Halle una ecuación diferencial que represente al ejercicio.
- Dado que $H(t) = U(t) = 0$, junto con la condición inicial $T(0) = 20$, que se corresponde con la temperatura al mediodía, ¿cuál será la temperatura del edificio a las 2 de la tarde?

Ejercicio 10

Tres tanques perfectamente aislados, completamente llenos con una solución de concentración es $C_i(0)\text{g/L}$.



Los tanques están interconectados en serie de tal forma que de añadir solución al primero, se transfiere la misma cantidad por la conexión al segundo y al tercero del cual rebosa hacia afuera del sistema. El tercer tanque tiene una salida por rebose que mantiene constante el volumen en cada tanque. Desde un tiempo $t(0) = 0$, al primer tanque se le añade una solución que tiene una concentración 50g/L , a razón de 300 L/min .

Considere $C_i(0) = 30\text{g/L}$ y el volumen de cada tanque de 1000L . En cada tanque entre lo que recibe y se transfiere al siguiente tanque se obtienen las siguientes ecuaciones:

$$\begin{aligned}\frac{dC_1}{dt} &= \frac{300}{1000}(50) - 0.3C_1 \\ \frac{dC_2}{dt} &= 0.3C_1 - 0.3C_2 \\ \frac{dC_3}{dt} &= 0.3C_2 - 0.3C_3\end{aligned}$$

- Determine la concentración en cada tanque durante los 3 primeros minutos de iniciar el experimento con 30

BIBLIOGRAFÍA

- [1] Chapra, S. (2007). Métodos numéricos para ingenieros (5ª. Ed.). Madrid: McGraw-Hill.
- [2] Burden, R. L. y Faires, J. D. (2011). Numerical analysis (. Boston: Brooks/Cole CENGAGE learning
- [3] Özis, T. y M. Ö. (2017). Derivation of three-derivative Runge-Kutta methods. Numerical algorithms 74, 247-265
- [4] Cordero, A., Hueso, J. L., Martínez, E. y Torregrosa, J. R. (2006). Problemas resueltos de métodos numéricos. Madrid: Thomson.
- [5] Cordero, A., Hueso, J. L., Martínez, E. y Torregrosa, J. R. (2005). Métodos numéricos con MATLAB. Valencia: Universidad Politécnica de Valencia.
- [6] Mathews, J. H., Fink, K. D. (2000). Métodos numéricos con MATLAB. Madrid: Prentice-Hall.
- [7] Cristina, M., & Fernández, C. (2013). MANUAL BÁSICO DE MATLAB.
- [8] Zill, D. G. (2016). Advanced Engineering Mathematics. Sudbury: Jones & Bartlett Learning.
- [9] Moreno, C. (2007). Introducción al cálculo numérico. Madrid: UNED.
- [10] Bravo, J. L., Souto, A. y, Cantón, A. (2012). Curso básico de programación en Matlab®. Madrid: Tébar Flores.
- [11] Gil, M. (2015). Introducción rápida a Matlab y Simulink. Madrid: Díaz de Santos.
- [12] Agud, L. y Pla, M. L. (2015). Matlab para matemáticas en ingenierías. Valencia. Universitat Politècnica de València.
- [13]. Cordero, A., Hueso, J. L., Martínez, E., Torregrosa, J. R. (2005). Métodos num. Matlab. Valencia: Universitat Politècnica de València.
- [14] Cordero, A., Hueso, J. L., Martínez, E. y Torregrosa, J. R. (2004). Cálculo Numérico. Valencia: Universitat Politècnica de València.
- [15] Sánchez, H., Heredia, I. y Cevallos, J. (2023). Métodos de un paso para PVI con MATLAB. Tomo 1. Riobamba. Escuela Superior Politécnica de Chimborazo.

Métodos múltipaso para PVI con MATLAB es un texto que está dividido en IV capítulos con el único propósito de ayudar a los estudiantes de grado y pregrado en la utilización de los métodos de dos pasos (Adams-Bashforth, Adams-Moulton, Predictor-Corrector) para resolver problemas de valor inicial aplicados en la matemática, física y química utilizando el *software* de Matlab. La obra está destinada a aquellos estudiantes de ciencias e ingeniería que tienen conocimiento en sistemas de ecuaciones diferenciales, ecuaciones diferenciales de primer orden y orden superior.

Hugo Javier Sánchez Moreno. Ingeniero químico graduado en la Escuela Politécnica Nacional de Quito. Magister en Química, mención Química Física. Actualmente cursa el doctorado en Ingeniería Química, Ambiente y Energía de la Universidad de Sevilla, España. Docente investigador de la ESPOCH desde 2021, profesor de Química Analítica, Química Orgánica y Química General. Autor de varias publicaciones en revistas indexadas.

Fabián Israel Heredia Moreno. Ingeniero en Electrónica Control y Redes Industriales, graduado en la Escuela Superior Politécnica de Chimborazo. Máster en Ingeniería Matemática y Computación, graduado en la Universidad de La Rioja. Especialista en Formulación y Evaluación de Proyectos de Investigación, Desarrollo de Algoritmos y Fórmulas Matemáticas Asociados a la Computación Aplicados a la Industria o Empresa. Autor de varias publicaciones en revistas indexadas.

Jhon Jairo Cevallos Medina Ingeniero en Electrónica, Control y Redes Industriales, graduado en la Escuela Superior Politécnica de Chimborazo. Máster universitario en Ingeniería de Sistemas Electrónicos en la especialidad de Sistemas Electrónicos Digitales, graduado en la Universidad Politécnica de Valencia. Especialista en Formulación, Seguimiento y Ejecución de Proyectos de Investigación, Compras Públicas, Derechos de Propiedad Intelectual y Manejo de FPGA. Autor de varias publicaciones en revistas indexadas.

ISBN: 978-9942-45-158-3

